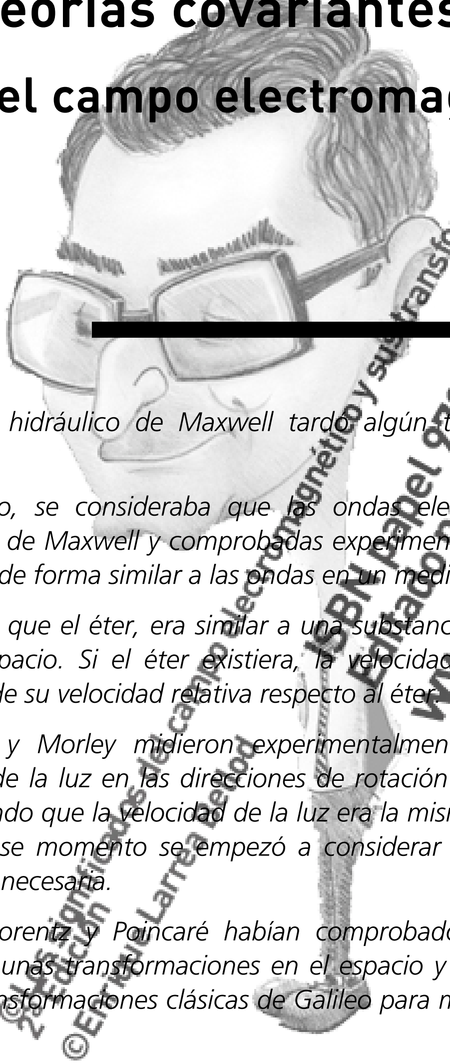
13

Teorías covariantes del campo electromagnético



El modelo hidráulico de Maxwell tardó algún tiempo en ser abandonado en su totalidad.

Al principio, se consideraba que las ondas electromagnéticas, predichas por las ecuaciones de Maxwell y comprobadas experimentalmente por Hertz, se propagaban por el éter de forma similar a las ondas en un medio elástico.

Se suponía que el éter, era similar a una substancia elástica indetectable que llenaba todo el espacio. Si el éter existiera, la velocidad de la luz en un sistema debería depender de su velocidad relativa respecto al éter.

Michelson y Morley midieron experimentalmente, por interferometría óptica, la velocidad de la luz en las direcciones de rotación de la tierra y en su perpendicular, comprobando que la velocidad de la luz era la misma en ambos sentidos, por lo que a partir de ese momento se empezó a considerar que la existencia del éter era una hipótesis innecesaria.

También Lorentz y Poincaré habían comprobado que las ecuaciones de Maxwell obedecían unas transformaciones en el espacio y el tiempo que no eran las mismas que las transformaciones clásicas de Galileo para movimientos relativos entre sistemas inerciales.

Fue Einstein el que generalizó los anteriores resultados para todos los sistemas físicos, elevándolos a principios de la mecánica en su estudio sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento, y asentó las bases de la teoría de la relatividad.

Las ecuaciones de Maxwell ya contienen en sí los principios de la relatividad y fue Einstein, con su gran intuición, el que se percató de que había unos principios más generales a los que obedecían tanto la materia como el campo electromagnético, existiendo una relación entre energía y momento independiente de su origen. Sin embargo, la nueva teoría trastocó también los anteriores conceptos de simultaneidad de sucesos en el espacio y el tiempo.

Analizaremos en este capítulo, como aplicación, el campo de radiación producido por una carga en movimiento.

Postulados de la relatividad restringida

La teoría de la relatividad restringida de Einstein para sistemas inerciales, se basa en una serie de postulados generales.

Se entiende por sistemas inerciales relativos, aquellos que se mueven entre ellos con una velocidad relativa lineal y uniforme. Se considera como postulados aquellos principios que se enuncian como verdaderos y que no se pueden demostrar.

Primer postulado: *La velocidad de la luz es la misma cuando se mide desde cualquier sistema inercial relativo.*

Segundo postulado: *Todas las ecuaciones de la física tienen que adoptar la misma forma en todos sistemas inerciales relativos.*

Tercer postulado: *Un sistema no inercial, se puede considerar instantáneamente inercial, respecto a otro sistema inercial.*

El primer postulado, comprobado experimentalmente por Michelson y Morley, es el que da origen a que las coordenadas del espacio y del tiempo no son independientes cuando se transforman entre sistemas inerciales. Por tanto, no existen un espacio y un tiempo absoluto independientes como había postulado Newton, y no se puede decidir qué sistema es absoluto.

Además, veremos que esto impone que la máxima velocidad de propagación en cualquier sistema es la velocidad de la luz. Esto elimina el problemático concepto de la acción instantánea a distancia y preserva el principio de causalidad de los sucesos.

Adicionalmente establece que no existe el reposo absoluto, tal como lo concibió Newton, y que el espacio y el tiempo son interdependientes.

El segundo postulado también se conoce como principio de la relatividad o de la covarianza, aunque es un postulado todavía no desmentido por la experiencia. Establece que, como no podemos diferenciar entre sistemas inerciales, las ecuaciones que expresan las leyes físicas de la naturaleza, deberán tener el mismo aspecto en todos ellos. Si no fuese así, las ecuaciones de la física serían siempre distintas para cada sistema inercial, y no podríamos hacer ningún tipo de física.

Se dice que las ecuaciones son covariantes, cuando adoptan una forma que cumple los postulados de la relatividad y tienen el mismo aspecto en todos sistemas inerciales. Veremos que esto impone que se transformen tensorialmente según el grupo restringido de las transformaciones de Poincaré entre sistemas inerciales.

También se conoce como principio de Poincaré covariante, que se formula como que todas las leyes de la física son invariantes ante la transformaciones de del grupo restringido de Poincaré (rotaciones espaciales, transformaciones boost de Lorentz y la translaciones). Se denomina restringido al no incorporar las inversiones o reflexiones espacio temporales.

El principio de la relatividad restringe pero no determina por completo como los sistemas interactúan, y debe ser complementado con el postulado de la invarianza de la velocidad de la luz para construir una cinemática.

El tercer postulado, conocido también como el postulado de los relojes o de la cronometría, se añadió posteriormente y la experiencia todavía no lo ha contradicho. Este postulado que tiene unas implicaciones muy sutiles, permite aplicar los principios de la relatividad a sistemas acelerados suponiendo que en cada instante tienen una velocidad instantánea uniforme.

Para que esto pueda hacerse, tiene que postularse que las ecuaciones de transformación entre sistemas inerciales no dependan de la aceleración, lo cual es una hipótesis que parece ser verdadera, ya que los resultados predichos concuerdan con la los experimentos realizados hasta ahora.

Transformaciones de Lorentz y de Poincaré

Si las ecuaciones de Maxwell son covariantes y tiene la misma forma en cualquier sistema inercial, la velocidad de la luz debe ser la misma en todos ellos, independiente del movimiento relativo del sistema o de la fuente. Este hecho ya fue observado por Lorentz y Poincaré, y comprobado experimentalmente por Michelson y Morley.

Que la velocidad de la luz debe ser la misma en todos los sistemas inerciales, se desprende también del principio de causalidad, ya que si la composición de velocidades siguiese la ley galileana, si se supone que la interacción entre dos puntos fijos en el espacio con un tercero es con una velocidad de propagación determinada, entonces siempre sería posible encontrar un sistema con movimiento relativo desde el que la relación causal observada se invierta. De igual forma tampoco existiría una velocidad de propagación máxima. Por esta razón, la mecánica Newtoniana para obviar esta dificultad lleva implícita la hipótesis de que las interacciones son instantáneas, y del concepto de simultaneidad absoluta. El propio principio de causalidad, veremos que lleva también a que la velocidad máxima de las interacciones sea también la máxima alcanzable dinámicamente, y que coincide con la velocidad de la luz, que es la misma en todos los sistemas inerciales.

La invarianza de la velocidad de la luz respecto a cualquier sistema inercial relativo tiene unas profundas implicaciones.

Supongamos, un sistema cartesiano $S`$ que se mueve paralelamente al eje $x$ con velocidad $v$ en la dirección positiva respecto a otro sistema $S$. Si en el instante $t = t` = 0$, cuando los orígenes de de los dos sistemas coinciden, ambos sistemas a la vez lanzan un rayo de luz, la ecuación de la superficie del frente de onda del rayo, vista desde cada uno de los respectivos sistemas, sería, teniendo en cuenta el primer postulado por el que la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas

$$c\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0 \quad \text{en } S$$

$$c\Delta t`^2 - \Delta x`^2 - \Delta y`^2 - \Delta z`^2 = 0 \quad \text{en } S`$$

Es decir $R^2 = c\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ es un invariante al pasar de un sistema a otro, pudiéndose sustituir las x^i por las $x^{i`}$ para pasar de un sistema a otro. $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ s el vector espacial que va del origen de coordenadas hasta la posición del frente de ondas.

La transformación geométrica que hace pasar de un sistema de coordenadas a otro es la misma que una rotación hiperbólica cartesiana en el plano x, t , pero con un ángulo imaginario

$$c\Delta t` = c\Delta t cos(i\theta) - \Delta x sen(i\theta) = c\Delta t cosh(\theta) - \Delta x senh(\theta)$$
$$\Delta x` = -c\Delta t sen(i\theta) + \Delta x cos(i\theta) = -c\Delta t senh(\theta) + \Delta x cosh(\theta)$$

siendo

$$\cosh(\theta) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Las anteriores ecuaciones se pueden poner también de la forma habitual

$$c\Delta t` = \gamma(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x)$$

$$\Delta x` = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad \Delta y` = \Delta y \qquad \Delta z` = \Delta z$$

Definiéndose

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \beta(v) = \frac{v}{c}$$

Una transformación pasiva boost de Lorentz en la dirección del eje x, viene representada por

$$\Delta x^{\alpha`} = \mathcal{L}^{\alpha`}{}_{\beta}\Delta x^{\beta} \qquad \Delta x^{\alpha} = \mathcal{L}_{\beta`}{}^{\alpha}\Delta x^{\beta`}$$

siendo $\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$ la matriz de Lorentz

$$\mathcal{L}^{\alpha`}{}_{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x^{\alpha`}}{\partial x^{\beta}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y$$

$$\mathcal{L}_{\beta`}{}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\, x^{\alpha}}{\partial x^{\beta`}} = \left(\mathcal{L}^{\beta`}{}_{\alpha}\right)^{-1}$$

Si los ejes de S y $S`$ son paralelos, la transformación inversa es equivalente a una inversión de la velocidad

$$\mathcal{L}_{\beta`}{}^{\alpha}(\vec{v}) = \mathcal{L}^{\alpha`}{}_{\beta}(-\vec{v})$$

Muchas veces se representa $\mathcal{L}_{\beta`}{}^{\alpha}$ simplemente como $\mathcal{L}^{\alpha}{}_{\beta`}$. No hay confusión, puesto que hemos mantenido el origen de los sistemas de coordenadas marcando los subíndices con prima y sin prima.

Si los ejes de S y $S`$ no son paralelos, primero se debe aplicar un rotación para llevar los ejes de forma paralela y luego a aplicar las anteriores transformaciones de Lorentz

Evidentemente se verifican las siguientes relaciones de ortogonalidad para mantener invariante la norma de los cuadrivectores en las transformaciones de Lorentz

$$g_{\alpha`\beta`}\mathcal{L}^{\alpha`}{}_{\alpha}\mathcal{L}^{\beta`}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \qquad g_{\alpha\beta}\,\mathcal{L}_{\alpha`}{}^{\alpha}\mathcal{L}_{\beta`}{}^{\beta} = g_{\,g_{\alpha`\beta`}}$$

o tambíen

$$\bar{\bar{\mathcal{L}}}\bar{\bar{g}}\bar{\bar{\mathcal{L}}} = \bar{\bar{g}}$$

Por tanto, el determinante de la matriz boost de Lorentz propia es la unidad $\left|\bar{\bar{\mathcal{L}}}\right| = 1$. Sin embargo $\bar{\bar{g}}\bar{\bar{\mathcal{L}}}$ si es una matriz simétrica unitaria y ortogonal

$$\left(\bar{\bar{g}}\bar{\bar{\mathcal{L}}}\right)^{T} = \left(\bar{\bar{g}}\bar{\bar{\mathcal{L}}}\right)^{-1} = I$$

El cambio de coordenadas es el mismo que en el álgebra de Minkowsky, sólo que ahora se opera con valores reales, definiéndose las coordenadas x^{α} en la forma

$$x^0 = ct \qquad x^1 = x \qquad x^2 = y \qquad x^3 = z$$

No se debe confundir las coordenadas x^1, x^2, x^2 con el vector (x^1, x^2, x^2) que va del origen a la posición de las coordenadas.

La anterior transformación conocida como transformación de Lorentz, o también transformación boost de Lorentz, es la transformación relativista para pasar de un sistema inercial a otro. Sin embargo fue Poincaré el primero que hizo la observación de que las ecuaciones del electromagnetismo deben ser invariantes ante una transformación de Lorentz.

Para una dirección arbitraria de movimiento con velocidad $\vec{v}$, cuando los ejes son paralelos, las ecuaciones de la transformación de Lorentz vienen dadas por

$$\vec{x}` = \vec{x} + \vec{v} \cdot \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2}(\gamma - 1) - \gamma t \right)$$

$$ct` = \gamma \left(ct - \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{c} \right)$$

Si los ejes no son paraleles, se pueden llevar a esa posición por una rotación espacial adecuada para hacer la transformación de Lorentz.

Se denomina grupo restringido de Lorentz $SO(1{,}3)$ al grupo de las transformaciones boost de Lorentz mas las rotaciones espaciales sin incluir las inversiones y reflexiones espacio temporales.

Este tipo de tipo de transformaciones las representaremos mediante la las matrices $\mathcal{L}_{r}{}^{\alpha`}{}_{\beta}$.

Se demuestra que toda transformación del grupo restringido de Lorentz se puede descompones en el producto de una transformación boost pura y una rotación espacial

$$\mathcal{L}_{r}{}^{\alpha`}{}_{\beta} \equiv \mathcal{L}^{\alpha`}{}_{\mu} R^{\mu}{}_{\beta} \equiv R`^{\alpha`}{}_{\mu`} \mathcal{L}`^{\mu`}{}_{\beta}$$

Si $V^{\alpha}(\bar{x})$ es un cuadrivector, una transformación de Lorentz se representará como

$$V`^{\alpha`}\left(x^{\beta}\right) = \mathcal{L}_{r}{}^{\alpha`}{}_{\beta} V^{\beta}\left(\mathcal{L}_{r}^{-1}\bar{x}\right)$$

Según el principio de la covarianza todas las leyes de la física son invariantes ante la transformaciones de del grupo restringido de Poincaré (rotaciones espaciales, transformaciones boost de Lorentz y la translaciones). Se denomina restringido al no incorporar las inversiones o reflexiones espacio temporales. Este grupo de transformaciones lo representaremos por las matrices

$$\mathcal{L}_{P\,\beta}^{\alpha`} = \mathcal{L}_{r\,\beta}^{\alpha`} + \delta^{\alpha`}{}_{\mu} a^{\mu}$$

El que la velocidad de luz sea la misma en todos los sistemas inerciales es la razón de que no se transformen de forma independiente las coordenadas espaciales y temporales entre sistemas inerciales.

Un cuadrivector contravariante $\bar{\Lambda}$ vendrá definido por cuatro componentes, una temporal y tres espaciales.

$$\bar{\Lambda} \equiv \Lambda^{\alpha} \equiv (\Lambda^0, \Lambda^1, \Lambda^2, \Lambda^3) \equiv (\Lambda^0, \vec{\Lambda})$$

Su vector covariante se representa por

$$\Lambda_{\alpha} \equiv (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \equiv (\Lambda^0, -\Lambda^1, -\Lambda^2 - \Lambda^3) \equiv (\Lambda^0, -\vec{\Lambda})$$

El producto escalar de dos cuadrivectores $\bar{\Lambda}$ y $\bar{K}$ se define por

$$\bar{\Lambda} \cdot \bar{K} \stackrel{\text{def}}{\equiv} g_{M\alpha\beta} \Lambda^{\alpha} K^{\beta} = \Lambda^{\alpha} K_{\alpha} = \Lambda^0 K^0 - \Lambda^1 K^1 - \Lambda^2 K^2 - \Lambda^2 K^3$$

La subida y bajada de índices también se puede hacer a través de tensor métrico

$$g_{M\alpha\beta} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de la forma

$$K_{\alpha} = g_{M\alpha\sigma} K^{\sigma}$$

$$K^{\alpha} = g_{\mathrm{M}}^{\alpha\rho} K_{\rho}$$

A K_{α} se denomina vector covariante del vector contravariante K^{α}. Esta distinción es importante cuando el tensor métrico no corresponde a la geometría euclídea.

Evidentemente se verifican las siguiente identidades en el espacio pseudoeuclídeo cuadrimensional

$$g_{M\alpha\rho} = g_{\mathrm{M}}^{\alpha\rho} \qquad g_{\mathrm{M}}^{\alpha\mu}\, g_{M\mu\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

En el caso de que el sistema $S`$ se desplace con velocidad uniforme $\vec{v}$ respecto al sistema S con los ejes de forma paralela, las coordenadas de un cuadrivector se transforman de un sistema a otro mediante una transformación de Lorentz

$$\Lambda^{\alpha`} = \mathcal{L}^{\alpha`}_{\ \beta}\Lambda^{\beta}$$

O de forma explícita

$$\Lambda^{0`} = \gamma\left(\Lambda^0 - \frac{v}{c}\Lambda^1\right)$$
$$\Lambda^{1`} = \gamma\left(\Lambda^1 - \frac{v}{c}\Lambda^0\right) \qquad \Lambda^{2`} = \Lambda^2 \qquad \Lambda^{3`} = \Lambda^3$$

En el caso de que la velocidad tenga una dirección $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ arbitraria, las ecuaciones de transformación vendrán dadas por la matriz

$$\mathcal{L}^{\alpha`}_{\ \beta} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\dfrac{v_j}{c} \\ -\gamma\dfrac{v^i}{c} & 1 + \dfrac{(\gamma-1)}{c^2}v^i v_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^T \\ -\gamma\vec{\beta} & 1 + \dfrac{(\gamma-1)}{\vec{\beta}^2}\vec{\beta}\vec{\beta}^T \end{pmatrix}$$

En forma explícita las relaciones de transformación toman la expresión

$$\Lambda^{0`} = \gamma\left(\Lambda^0 - \vec{\Lambda}\cdot\vec{\beta}\right)$$
$$\vec{\Lambda}` = \vec{\Lambda} + \frac{(\gamma-1)\vec{\Lambda}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}\vec{\beta} - \gamma\Lambda^0\vec{\beta}$$

Las anteriores ecuaciones para las transformaciones e Lorentz, se pueden expresar de una forma general mediante las expresiones

$$\Lambda^{0`} = \gamma\left(\Lambda^0 - \frac{v}{c}\Lambda_{\parallel}\right)$$
$$\Lambda_{\parallel`} = \gamma\left(\Lambda_{\parallel} - \frac{v}{c}\Lambda^0\right)$$
$$\Lambda_{\perp`} = \Lambda_{\perp}$$

donde $\Lambda_{\parallel}$, $\Lambda_{\perp}$ son las proyecciones en la dirección paralela y perpendicular a $\vec{v}$

$$\Lambda_{\parallel} = \vec{\Lambda}\cdot\vec{\beta}$$
$$\Lambda_{\perp} = \vec{\Lambda} - \vec{\Lambda}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\wedge\vec{\Lambda}\wedge\vec{\beta}$$

Si $\overline{\Lambda}^2 \equiv \Lambda^{\alpha}\Lambda_{\alpha} = {\Lambda^0}^2 - \vec{\Lambda}^2 > 0$ entonces se dice que $\overline{\Lambda}$ es un cuadrivector de tipo temporal. Si $\overline{\Lambda}^2 \equiv \Lambda^{\alpha}\Lambda_{\alpha} = {\Lambda^0}^2 - \vec{\Lambda}^2 < 0$ entonces es de tipo espacial. Este carácter es invariante ante las transformaciones de Lorentz.

Si $\overline{\Lambda}$ es temporal, entonces existe un sistema inercial relativo $S`$ en que su componente espacial se anula $\vec{\Lambda}` \equiv 0$. De igual forma, si es espacial, entonces existe un sistema inercial relativo $S`$ en que su componente temporal se anula $\Lambda^{0`} \equiv 0$.

Este teorema tiene una consecuencia importante, y es que si $\Delta\bar{x}$ es el cuadrivector que representa la diferencia entre dos sucesos $\Delta\bar{x} = (ct^2 - ct^1, \vec{x}^2 - \vec{x}^1)$, entonces si $\bar{x}^2 > 0$, es posible encontrar un sistema inercial $S`$ en que los dos sucesos ocurran en la misma posición espacial $\vec{x}`^2 = \vec{x}`^1$. De igual forma si $\Delta\bar{x}^2 < 0$, entonces es posible encontrar otro sistema inercial $S`$ en que los dos sucesos ocurran en simultáneamente $t`^2 = t`^1$. Vemos por tanto, que en las transformaciones boost de Lorentz, el concepto de simultaneidad es un concepto relativo que depende del sistema de inercia en que se observa, a diferencia de la espacio tiempo Newtoniano, en la simultaneidad era un concepto absoluto para todos los sistemas inerciales. Esto es una consecuencia de la constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales.

Dos puntos están relacionados causalmente si su intervalo es temporal $\Delta\bar{x}^2 > 0$, de forma que el orden de los sucesos se preserva en todos los sistemas inerciales relativos.

Se define la longitud propia como la distancia geométrica medida entre dos puntos medidos de forma simultánea.

Consideremos una regla situada sobre el eje $x`$ de un sistema $S`$ que se mueve uniformemente con velocidad v respecto a otro sistema inercial S. Si ℓ es la longitud medida desde S, entonces por las transformaciones Lorentz se verificará

$$\ell_0 = \Delta x` = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma\Delta x = \gamma\ell$$

Es decir, si una regla de longitud ℓ_0 se desplaza uniformemente, un observador en reposo medirá una longitud contraída en un factor γ^{-1}

$$\ell = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\ell_0$$

De igual forma si $\Delta t`$ es el intervalo de tiempo de dos sucesos que ocurren en un mismo punto $x`$ en $S`$, entonces el intervalo de tiempo que se observa desde S será distinto

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t` + \frac{v}{c^2}\Delta x`\right) = \gamma\Delta t`$$

Es decir, los intervalos de tiempo observados desde un observador en reposo aparecen dilatados en un factor γ.

Es de comentar, que para hacer esta medida en S, es necesario tener en cada punto del espacio unos relojes sincronizados, lo cual se puede hacer enviando una señal de luz de ida y vuelta entre dos puntos cualesquiera del espacio. La diferencia de tiempos de sus relojes sincronizados debe ser dos veces la longitud que les separa dividida por la velocidad de la luz. Entonces, a cada punto $\vec{x}$ del espacio en S, se le puede asignar *una coordenada t, y que en realidad son solo etiquetas para ordenar los sucesos temporalmente en S. Esto se puede ver también como que las transformaciones de Lorentz son invariante ante un cambio de escala $(\vec{x}, t) \rightarrow \lambda(\vec{x}, t)$. Las coordenadas son simplemente etiquetas que no tienen en sí ningún significado intrínseco.*

Si suponemos que un reloj situado en el origen de $S`$, cuando marque los instantes $t`^1$ y $t`^2$ pasará por dos puntos x^1 y x^2 de S que marcarán unos tiempos t^1 y t^2 en sus respectivos relojes locales sincronizados. Entonces se verificará

$$\Delta t = t^2 - t^1 = \gamma(t`^2 - t`^1) = \gamma \Delta t`$$

Es importante tener en cuenta, que las medidas realizada desde un sistema inercial en reposo S, son observaciones relativas respecto a otro sistema inercial $S`$ que se mueve uniformemente, y que deben cumplir con los criterios de observación y medida antes expuestos con relación a la distribución de relojes sincronizados en el espacio de S. Además, desde el punto de vista de la teoría de la relatividad restringida, los resultados anteriores de observación son simétricos cuando se intercambian los sistemas.

Cuando la geometría es euclidiana, la diferencia entre vector covariante y contravariante es sólo cambiar el signo de sus componentes espaciales. Aquí sin embargo, consideraremos que el espacio es de tres dimensiones y euclídeo, es decir homogéneo e isótropo.

Es corriente en la literatura en este caso denominar a $g_{\alpha\beta}$ como $\eta_{\alpha\beta}$, reservando para $g_{\alpha\beta}$ la designación del tensor métrico en un espacio tempo no euclídeo.

Los cuadrivectores temporal $(\Lambda^0, \vec{0})$ y espacial $(0, \vec{K})$ son ortogonales, y así será en cualquier sistema inercial $S`$. Por tanto, el producto de un vector espacial por uno ortogonal siempre será cero.

De lo anterior se desprende, que dos cuadrivectores $\bar{\Lambda}$ y $\bar{K}$ cuyos módulos se anulan y son ortogonales entre sí deben ser proporcionales.

$$\bar{\Lambda}^2 = 0 \quad \bar{K}^2 = 0 \;\; y \;\; \bar{\Lambda} \cdot \bar{K} = 0 \;\; \Rightarrow \quad \bar{\Lambda} = C^{te}\bar{K}$$

Esta es una propiedad que diferencia el espacio vectorial de Minkowski del estrictamente euclidiano. Ello es debido a la forma de la métrica $g_{\alpha\beta}$, por lo que la norma de un cuadrivector puede ser tanto positiva como negativa debido. Por esta razón se dice que el espacio tiempo de Minkowski es pseudoeuclídeo.

Vemos que, en el caso de un rayo de luz, si la posición del frente viene dada por las coordenadas del cuadrivector

$$\bar{R} = (R^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

se verifica entonces

$$\bar{R}^2 = R^\alpha R_\alpha = x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

y que además R^2 es un invariante.

Esto era de esperar por el segundo postulado de la relatividad. El producto escalar de dos cuadrivectores deberá ser un invariante ante las transformaciones de Lorentz, por lo que deberán cambiar sus coordenadas al pasar del sistema S a $S`$ de la forma

$$\Lambda^{\alpha`} = \mathcal{L}^{\alpha`}{}_{\beta}\Lambda^{\beta}$$

Por el movimiento relativo, el paso de S a $S`$ se hace intercambiando $\Lambda$ por $\Lambda`$ y β por $-\beta$ o v por $-v$.

De forma similar, un tensor orden dos se transformar como

$$\mathcal{F}^{\alpha`\beta`} = \mathcal{L}^{\alpha`}{}_{\mu}\mathcal{L}^{\beta`}{}_{\sigma}\mathcal{F}^{\mu\sigma} \qquad \mathcal{F}^{\mu\sigma} \equiv g_{\mathrm{M}}^{\mu\alpha} g_{\mathrm{M}}^{\sigma\beta}\,\mathcal{F}_{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{F}_{\alpha`\beta`} = \mathcal{L}_{\alpha`}{}^{\mu}\mathcal{L}_{\beta`}{}^{\sigma}\mathcal{F}_{\mu\sigma} \qquad \mathcal{F}_{\mu\sigma} \equiv g_{M\mu\alpha} g_{M\sigma\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta}$$

De igual forma se puede generalizar las relaciones de transformación para tensores de órdenes superiores.

Para una dirección arbitraria de movimiento con velocidad $\vec{v}$, cuando los ejes son paralelos, las ecuaciones de la transformación de Lorentz para un cuadrivector $\bar{\Lambda} = (\Lambda^0, \vec{\Lambda})$ son las mismas que para el cuadrivector $\bar{\Lambda}$

$$\vec{\Lambda}` = \vec{\Lambda} + \vec{v} \cdot \left(\frac{\vec{\Lambda} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2}(\gamma - 1) - \gamma t \right)$$

$$\Lambda^{0`} = \gamma \left(\Lambda^0 - \frac{\vec{\Lambda} \cdot \vec{v}}{c} \right)$$

El algebra de Minkowsky con un coordenada temporal imaginaria utilizada a veces por la literatura, es fácilmente transportable a la formulación covariante, con un cambio de definición del cuadrivector y de su producto escalar.

$$(\Lambda^0, \vec{\Lambda}) \quad \leftrightarrow \quad (\vec{\Lambda}, i\Lambda^0)$$

En el capítulo de teorías geométricas, se analiza con más detalle las propiedades geométricas de las transformaciones de Lorentz y de Poincaré

Transformaciones covariantes y principio de la covarianza

Se dice que una ecuación es covariante cuando adopta una misma forma tensorial invariante en todos los sistemas inerciales. Las ecuaciones del electromagnetismo son invariantes ante las transformaciones de Lorentz y los dos primeros postulados exigen que todas las ecuaciones de la física lo sean.

Sin embargo, en la forma vectorial las ecuaciones de Maxwell no están escritas de forma covariante.

El principio de la relatividad establece que si S y S' son dos sistemas de inercia, cualquier relación funcional F entre magnitudes físicas $\emptyset^{\alpha}_{\beta}$..., que expresa una ley de la naturaleza, tienen la misma forma invariante (covariante) en ambos sistemas cuando se hace la transformación de uno a otro $S \leftrightarrow S'$

$$F\left(\emptyset^{\alpha}_{\beta},..,\partial_{\mu}\emptyset^{\alpha}_{\beta},..\right) = 0 \text{ en } S \text{ y } F\left(\emptyset'^{\alpha'}_{\beta'},..,\partial_{\mu'}\emptyset'^{\alpha'}_{\beta'},..\right) = 0 \ en\, S'$$

Las leyes de la física se expresan de forma natural de forma tensorial. El teorema fundamental de los tensores, establece que si una relación tensorial se anula en un sistema de coordenadas, entonces se anulará al pasar tensorialmente a otro sistema de coordenadas equivalente.

Para aclarar que significa la forma covariante, supongamos que hacemos una transformación general de coordenadas

$$x^{\alpha} \to x^{\alpha'} = f^{\alpha'}\left(x^{\beta}\right) \quad \text{o} \quad x^{\alpha'} \to x^{\alpha} = g^{\alpha}\left(x^{\beta'}\right)$$

Se verificara entonces

$$dx^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} \equiv \frac{\partial f^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} \equiv \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} dx^{\beta} \quad \text{y}$$

$$dx^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}} dx^{\beta'} \equiv \frac{\partial g^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}} dx^{\beta'} \equiv \Lambda_{\beta'}{}^{\alpha} dx^{\beta'}$$

Definiéndose

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} \equiv \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \qquad \text{y} \qquad \Lambda_{\beta'}{}^{\alpha} \equiv \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}} = \left(\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha}\right)^{-1}$$

ya que se verifica

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu}\, \Lambda_{\beta'}{}^{\mu} \equiv \delta^{\alpha'}_{\beta'} \quad \text{y} \quad \Lambda^{\mu'}{}_{\beta}\, \Lambda_{\mu'}{}^{\alpha} \equiv \delta^{\alpha}_{\beta}$$

Si una ecuación que representa una ley física viene representada por una expresión tensorial de la forma

$$F\left(\emptyset^{\alpha}_{\beta},\ldots,\partial_{\mu}\emptyset^{\alpha}_{\beta},\ldots\right)=0$$

Entonces, el principio de la covarianza establece que su forma funcional se mantiene cuando se hace una transformación tensorial covariante

$$F\left(\emptyset`^{\alpha`}_{\beta`},\ldots,\partial_{\mu`}\emptyset`^{\alpha`}_{\beta`},\ldots\right)=0$$

siendo

$$\emptyset'^{\alpha`}_{\beta`}(x`^{\kappa})=\Lambda^{\sigma}{}_{\beta`}\Lambda^{\alpha`}{}_{\gamma}\emptyset^{\gamma}_{\sigma}(x^{\kappa}) \quad \text{y} \quad \partial_{\mu`}\emptyset`^{\alpha`}_{\beta`}(x`^{\kappa})=\Lambda^{\rho}{}_{\mu`}\Lambda^{\sigma}{}_{\beta`}\Lambda^{\alpha`}{}_{\gamma}\partial_{\rho}\emptyset^{\alpha}_{\sigma}(x^{\kappa})$$

Por $\emptyset`(x^{\alpha`})$ se indica que la forma de dependencia funcional respecto a $x^{\alpha`}$ después de la transformación puede ser distinta que la de $\emptyset(x^{\kappa})$ respecto a x^{κ}.

Las transformaciones discretas de paridad e inversión temporal las podemos representar mediante las matrices diagonales

$$\bar{\bar{\mathcal{P}}}\equiv\mathcal{P}^{\alpha`}_{\beta}=diag\,(1,1,-1,-1) \quad y$$
$$\bar{\bar{\mathcal{T}}}\equiv\mathcal{T}^{\alpha`}_{\beta}=diag\,(-1,1,1,1)$$

Tiempo propio

Se define el intervalo de tiempo propio, como el intervalo de tiempo medido por un observador que se desplaza conjuntamente con el sistema en movimiento

Supongamos que en $S`$ medimos dos sucesos que ocurren en $\bar{R}`^{1}=(ct`^{1},x`^{1},0{,}0)$ y $\bar{R}`^{2}=(ct`^{2},x`^{2},0{,}0)$.

En el sistema S se verá que ocurren, según la transformación de Lorentz, en

$$\bar{R}^{1}=\gamma(ct`^{1}+\beta x`^{1},x`^{1}+vt`^{1},0{,}0)$$
$$\bar{R}^{2}=\gamma(ct`^{2}+\beta x`^{2},x`^{2}+vt`^{2},0{,}0)$$

Un suceso que ocurre en el origen de $S`$ en los tiempos $ct`^{1}$ y $ct`^{2}$ se verá en $S$ que ocurren en $\gamma ct`^{1}$ y $\gamma ct`^{2}$. Es decir, $\Delta t=\gamma\Delta t`$ y, por tanto, el intervalo temporal entre sucesos en S se verá dilatado respecto $S`$.

Por definición el intervalo de tiempo propio $d\tau$ será

$$ds^{2}=c^{2}d\tau^{2}=d\bar{x}^{2}=dx^{\alpha}dx_{\alpha}=c^{2}dt^{2}-dx^{2}-dy^{2}-dz^{2}$$

El intervalo de tiempo propio es, por la definición, un invariante relativista, y corresponde al intervalo de tiempo medido por un observador que se desplaza conjuntamente con el sistema en movimiento. Dos puntos próximos en la trayectoria de una partícula están separados por un intervalo propio $cd\tau$.

En el origen del sistema inercial $S`$ es $dt` = d\tau$, y en cualquier otro sistema se verá el intervalo de tiempo dilatado en un factor γ. El intervalo de tiempo propio, que es el medido en el sistema en movimiento, siempre es menor que el observado desde el sistema en reposo. Por ello, también se dice que los relojes del sistema S atrasan cuando se los comparan con respecto a un reloj móvil en $S`$.

Desde el punto de vista del sistema S, un reloj situado en el origen de coordenadas del sistema en movimientos $S`$ sigue una trayectoria en el espacio de cuatro dimensiones de $S$ que se denomina línea del mundo. Los intervalos de tiempo medidos en $S$ a lo largo de una trayectoria del mundo entre dos puntos de ella, son siempre son mayores que los intervalo de tiempo propio medidos en $S`$:

$$c\tau = \int_{(\vec{x}_1,t_1)}^{(\vec{x}_2,t_2)} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right)^2}\, cdt < c\Delta t$$

Por *tanto* $-\Delta\tau$ *es un mínimo respecto al tiempo observado entre todas las trayectorias posibles que unen dos sucesos.*

$ds = c\Delta\tau$ es un invariante relativista ante una transformación de Poincaré, pero que depende de la trayectoria dada, por lo que no es integrable y no es una diferencial exacta, es decir, depende de la trayectoria que une los puntos $\vec{x}_1, t_1$ y $\vec{x}_2, t_2$.

Por otra parte intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ entre dos sucesos en S aunque no es un invariante relativista, si es independiente del camino de la trayectoria y por tanto es integrable.

Con relación a los tiempos propios medidos por un observador $S`$ que se desplaza por trayectoria del mundo respecto a S, existe un importante postulado que la experiencia hasta el presente ha confirmado.

Postulado de los relojes o de la cronometría

La aceleración de un reloj no tiene influencia en la velocidad del tiempo del propio reloj, o lo que lo mismo, el tiempo propio transcurre de forma independiente de su movimiento o aceleración.

Por ello, junto con un reloj situado en el origen de $S`$ *es posible fijar un sistema inercial* $S`_i$ *respecto al cual* S *está instantáneamente en reposo. El postulado de los relojes nos dice que cuando se hace la transformación de Lorentz desde* $S`_i$ *a otro* *sistema inercial S la relación de transformación γ solo depende de la velocidad instantánea relativa v entre ambos sistemas y es independiente de la aceleración*

$$\gamma = \gamma(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad dt = \gamma d\tau$$

Este postulado es de gran importancia para la dinámica relativista, pues nos permite describir las ecuaciones de movimiento de un sistema no inercial acelerado respecto a otro sistema inercial relativo realizando transformaciones sucesivas de Lorentz desde los sistemas instantáneos en reposo.

A veces este postulado de los relojes, se le denomina hipótesis de la cronometría, que dice que los intervalos de los sucesos propios son los mismos en todas las trayectorias del mundo.

Geometría del espacio de Minkowski

También a ds

$$ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \equiv dx^\alpha dx_\beta = invariante$$

se le denomina diferencial métrico, ya que según la geometría diferencial es la que determina las propiedades intrínsecas de las curvas y superficies en el espacio. Al poder ser ds^2 tanto positivo como negativo, se dice que el espacio tiempo de Lorentz (o de Minkowski que fue realmente su creador) tiene una métrica indefinida, o que es pseudo-euclidiano, a diferencia del espacio euclidianos en que los cuadrados de las distancia siempre son positivos.

Como ya hemos comentado ds es un invariante relativista. Existen también otros invariantes geométricos que conviene destacar. Entre otros, todo el producto escalar de dos cuadrivectores siempre será un escalar invariante ante las transformaciones relativistas.

Invariantes fundamentales son los cuadrivectores $d\bar{x} = (dx^\alpha)$ y $\overline{\nabla} = (\partial_\alpha)$ que proceden de la transformación de Poincaré entre dos puntos próximos, cuando $\overline{\nabla}$ actúa sobre un campo escalar.

El operador laplaciano $\partial_\alpha \partial^\alpha = g^{\alpha\mu}\partial_\alpha \partial_\mu$ cuando actúa sobre un campo escalar, también es un escalar invariante, y por ello la ecuación de ondas es un invariante relativista.

El elemento de volumen cuadrimensional es otro escalar invariante relativista

$$d\Omega \stackrel{\text{def}}{=} d^4x \equiv dx^0dx^1dx^2dx^3 \equiv cdtdxdydz$$

Es destacar que

$$d\bar{V} \equiv (dV^{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} (dx^1dx^2dx^3, dx^2dx^3dx^0, dx^3dx^0dx^1, dx^0dx^1dx^2)$$

se transforma relativisticamente como un cuadrivector, lo cual se comprueba fácilmente observando que $dV_{\alpha}dx^{\alpha} = 4d\Omega$ es un escalar relativista invariante.

En el caso en que $dx^0 = 0$ entonces la relación de transformación viene dada por

$$d\bar{V} \equiv (dV_{\alpha}) = \left(d^3x, \vec{0}\right) \quad \rightarrow \quad d\bar{V}` \equiv (dV_{\alpha`}) = \left(\gamma d^3x, \gamma \frac{\vec{v}}{c} d^3x\right)$$

En el espacio cuadrimensional solo es posible formar el tensor de cuarto orden totalmente antisimétrico de Levi-Civita $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}$ con todas sus componentes constantes iguales en valor absoluto. Por ello, serán tensores relativistas las contracciones con él.

Si $\bar{x}_{(1)}, \bar{x}_{(2)}, \bar{x}_{(2)}, \bar{x}_{(4)}$ son cuatro cuadrivectores linealmente independientes, entonces con ellos se pueden forma los siguientes tensores invariantes

Con dos cuadrivectores cualesquiera, se puede formar el tensor antisimétrico bilineal del parelogramo, de área y su dual

$$\underset{(ij)}{S^{\alpha\beta}} = x^{\alpha}_{(i)}x^{\beta}_{(j)} - x^{\beta}_{(i)}x^{\alpha}_{(j)} \qquad \underset{(ij)}{S^*_{\alpha\beta}} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}x^{\mu}_{(i)}x^{\sigma}_{(j)}$$

$$\underset{(ij)}{S^2} = \frac{1}{2!} \underset{(ij)}{S^{\alpha\beta}} \underset{(ij)}{S_{\alpha\beta}}$$

Con tres cuadrivectores cualesquiera, se puede formar el tensor antisimétrico del paralelepípedo tridimensional, de volumen tridimensional y su dual

$$\underset{(ijk)}{V^{\alpha\beta\mu}} = det\left|x^{\alpha}_{(i)}x^{\beta}_{(j)}x^{\mu}_{(k)}\right| \qquad \underset{(ijk)}{V_{\alpha}} = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}\underset{(ijk)}{V^{\beta\mu\sigma}} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}x^{\beta}_{(i)}x^{\mu}_{(j)}x^{\sigma}_{(k)}$$

$$\underset{(ijk)}{V^2} = \underset{(ijk)}{V^{\alpha}} \underset{(ijk)}{V_{\alpha}} = \frac{1}{3!}\underset{(ijk)}{V^{\alpha\beta\mu}} \underset{(ijk)}{V_{\alpha\beta\mu}}$$

Con cuatro cuadrivectores cualesquiera, se puede formar el tensor antisimétrico del paralelepípedo cuadrimensional, de volumen cuadrimensional y su dual

$$\Omega^{\alpha\beta\mu\sigma} = det\left|x^{\alpha}_{(i)}x^{\beta}_{(j)}x^{\mu}_{(k)}x^{\sigma}_{(l)}\right| \qquad \Omega = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}\Omega^{\alpha\beta\mu\sigma} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}x^{\alpha}_{(i)}x^{\beta}_{(j)}x^{\mu}_{(k)}x^{\sigma}_{(k)}$$

Es fácil comprobar que se verificas las relaciones de ortogonalidad

$$\underset{(ij)}{S^{\alpha\beta}} \underset{(ij)}{S^*_{\alpha\beta}} \equiv 0 \qquad \underset{(ij)}{S^*_{\alpha\beta}} x^{\alpha}_{(i)} \equiv 0 \qquad \underset{(ij)}{S^*_{\alpha\beta}} x^{\alpha}_{(j)} \equiv 0$$

$$\underset{(ijk)}{V^{\alpha\beta\mu}} \underset{(ijk)}{V_{\alpha}} \equiv 0 \qquad \underset{(ijk)}{V_{\alpha}} x^{\alpha}_{(i)} \equiv 0 \qquad \underset{(ijk)}{V_{\alpha}} x^{\alpha}_{(j)} \equiv 0 \qquad \underset{(ijk)}{V} x^{\alpha}_{(j)} \equiv 0$$

En el caso particular de que sean

$$\bar{x}_{(0)} = (dx^0, 0,0,0) \;\; \bar{x}_{(1)} = (0, dx^1, 0,0) \;\; \bar{x}_{(2)} = (0,0, dx^2, 0) \;\; \bar{x}_{(3)} = (0,0,0, dx^3)$$

Entonces será

$$\Omega \to d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$
$$V_\alpha \to dV_\alpha = (dx^1 dx^2 dx^3, dx^2 dx^3 dx^0, dx^3 dx^0 dx^1, dx^0 dx^1 dx^2)$$

El teorema de Gauss adopta la forma

$$\int_{\Omega} \partial_\alpha \Lambda^{\,\alpha} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \Lambda^{\,\alpha} dV_\alpha$$

Si $\partial\Omega$ es el hipervolumen limitado por dos superficies t_1 y t_2 constantes $dx^0 = 0$, entonces se verifica

$$\int_{\Omega} \partial_\alpha \Lambda^{\,\alpha} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \Lambda^{\,\alpha} dV_\alpha = \int_{t_1, V_\infty} \Lambda^{\,0} d^3x - \int_{t_2, V_\infty} \Lambda^{\,\alpha} d^3x$$

Esto nos dice que si $\Lambda^{\,\alpha}$ es una corriente conservativa que verifica $\partial_\alpha \Lambda^{\,\alpha} = 0$, entonces, la magnitud $\Lambda^{\,0}$ integrada a todo el espacio es una constante independiente del tiempo

$$\int_{V_\infty} \Lambda^{\,0} d^3x = C^{te} \;\; \text{y} \;\; \frac{d\Lambda^{\,0}}{dt} = 0$$

Principio de la extensión covariante

Si en un sistema inercial en reposo se conoce una ecuación no covariante de una ley física, y esta se puede poner en una forma tensorial covariante que para ese sistema en reposo reproduce la ecuación física correcta, entonces la formula covariante es válida para todo sistema inercial con movimiento relativo uniforme.

En realidad este criterio se puede considerar una variante del segundo postulado teniendo en cuenta las propiedades de los tensores.

Sin embargo, no existe un procedimiento general para encontrar la ecuación covariante de cualquier ecuación física conocida para un sistema inercial en reposo. Además, la covarianza es una condición suficiente para la invarianza relativista, pero no es una condición necesaria para ello.

Cinemática relativista

Se define la diferencia entre dos sucesos próximos en S por

$$d\bar{\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{\equiv} (cdt, dx, dy, dz) = (cdt, d\vec{x})$$

El cuadrivector de velocidad de una partícula en el sistema S se define por

$$\bar{\mathcal{U}} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \frac{d\bar{\mathcal{R}}}{d\tau} = (\gamma c, \gamma c u^x, \gamma c u^y, \gamma c u^z) = (\gamma c, \gamma \vec{u})$$

siendo ahora

$$\gamma = \gamma(\vec{u}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

donde $\vec{u}$ es el vector espacial de velocidad en S, ya que consideramos que la partícula se encuentra en el origen del sistema S` que se mueve con ella, y respecto al cual se encuentra en reposo.

Puesto que $d\bar{\mathcal{R}}$ es un cuadrivector y ds es un invariante escalar, $\bar{\mathcal{U}}$ será un vector y su módulo será un invariante

$$\bar{\mathcal{U}}^2 = \mathcal{U}^\alpha \mathcal{U}_\alpha = c^2$$

Como $\bar{\mathcal{U}}$ es un vector temporal es posible siempre encontrar un sistema inercial S_0 e que la partícula está en reposo con velocidad nula $\vec{u} = 0$.

Si consideramos ahora una partícula que se mueve respecto a un sistema S con velocidad $\vec{u}$. Respecto a un sistema en reposo instantáneo S_i, la partícula tendrá como componentes $\bar{\mathcal{U}}_i = (c, 0)$. Si hacemos una transformación de Lorentz desde el sistema en reposo instantáneo S_i al sistema S será

$$\bar{\mathcal{U}} = (\gamma_u c, \gamma_u \vec{u}) \qquad \gamma_u = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$$

que coincide con el vector de cuadrivelocidad en S.

Consideremos un sistema S` que se mueve respecto a $S_i$ con velocidad $\vec{v}$ medida desde $S$. La cuadrivelocidad respecto a $S$` será $(\gamma_{u`} c, \gamma_{u`} \vec{u}`)$, donde $\vec{u}`$ es la velocidad relativa de S_i respecto a S`. Si hacemos una transformación de Lorentz de $S_i$ a $S$` se verificará

$$\gamma_{u`} \vec{u}` = \gamma_u \vec{u} + (\gamma_v - 1)\gamma_u (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} - \gamma_v \gamma_u \vec{u}$$

$$\gamma_{u`} \mathcal{U}`^0 = \gamma_v (\gamma_u c - \gamma_u \vec{u} \cdot \vec{v}/\mathrm{c})$$

Separando en componentes paralelas y perpendiculares a la dirección de $\vec{v}$, tenemos

$$\begin{aligned}\gamma_{u'}u'_{\parallel} &= \gamma_u\gamma_v(u_{\parallel}-v)\\ \gamma_{u'}u'_{\perp} &= \gamma_u u_{\parallel}\\ \gamma_{u'}\mathcal{U}'^{0} &= \gamma_u\gamma_v(\gamma_u c-u_{\parallel}/c)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la igualdad

$$\gamma_{u'}=\gamma_u\gamma_v(1-\vec{u}\cdot\vec{v}/c^2)$$

La ecuaciones se pueden rescribir como

$$\begin{aligned}u'_{\parallel} &= \frac{u_{\parallel}-v}{1-\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}}\\ \gamma_{u'}u'_{\perp} &= \gamma_u u_{\parallel}\\ \mathcal{U}'^{0} &= \frac{c-\dfrac{v}{c}u_{\parallel}}{1-\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}}\end{aligned}$$

La anteriores ecuaciones nos dan la ley de composición cinemática de velocidades, indicándonos que la velocidad máxima siempre será inferior a la velocidad c de la luz.

Se define el cuadrivector aceleración de una partícula por

$$\bar{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\bar{\mathcal{U}}}{d\tau}=\left(\gamma c\frac{d\gamma}{dt},\gamma\frac{d\vec{u}}{dt}\right)=(\gamma^4\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c},\gamma^4\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{u}+\gamma^2\vec{a})$$

En el sistema en reposo instantáneo de la partícula, es $\vec{u}=0$ y $\gamma=1$, por lo que la velocidad y la aceleración respecto a este sistema es $\bar{\mathcal{U}}=(c,0)$ y $\bar{\mathcal{A}}=(0,\vec{a})$ por lo que se verifica la identidad $\bar{\mathcal{U}}\cdot\bar{\mathcal{A}}\equiv 0$, que es un invariante relativista.

Es decir, los cuadrivectores velocidad y aceleración son siempre perpendiculares.

Obsérvese que la obtención de los anteriores resultados lleva implícita la aplicación del tercer postulado. El que γ no dependa de la aceleración instantánea, y sólo sea función de la velocidad, es un postulado adicional, que hasta le fecha no ha sido contradicho por la experiencia y permite hacer una cinemática relativista.

Sea $\bar{x}=\bar{f}(\tau)$ la trayectoria de una partícula en un sistema inercial S, y sean S' y S'' los sistemas de reposo instantáneos de reposo en los instantes τ y $\tau+d\tau$. La velocidad del origen de coordenadas de S' respecto a S será $\bar{\mathcal{U}}(\tau)=f_{,\tau}$ y la velocidad del origen de S'' respecto a S será $\bar{\mathcal{U}}(\tau)+d\bar{\mathcal{U}}(\tau)=\bar{f}_{,\tau}+\bar{f}_{,\tau}d\tau$. El postulado de la cronometría nos permite descomponer la transformación de S'' a S' mediante el producto de las transformaciones de Lorentz de S'' a S y luego de S a S' con las velocidades instantáneas relativas

$$\mathcal{L}_{\beta``}^{\alpha`}\left(\bar{\mathcal{U}}(\tau)+d\bar{\mathcal{U}}(\tau)\right)=\mathcal{L}^{\alpha`}_{\mu}\left(\bar{\mathcal{U}}(\tau)\right)\mathcal{L}_{\beta``}^{\mu}\left(d\bar{\mathcal{U}}(\tau)\right)$$

Efectuando los cálculos para una rotación infinitesimal de Lorentz, se llega a importante resultado de Möller, que nos la ecuación de cómo varía las transformaciones de Lorentz instantáneas ante un movimiento arbitrario

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{L}^{\alpha`}_{\beta``}=\mathcal{L}^{\alpha`}_{\mu``}\eta^{\mu``}_{\beta``}$$

siendo

$$\eta^{\mu}_{\beta}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathcal{U}^{\mu}}{dx}\mathcal{U}_{\beta}-\frac{d\mathcal{U}^{\beta}}{dx}\mathcal{U}_{\mu}\right)$$

Una vez resuelta la anterior se obtiene la ecuación de la trayectoria que vendrá dada por

$$x^{\alpha}=f^{\alpha}(\tau)+x^{`\mu`}\mathcal{L}_{\mu`}^{\alpha}(\tau)$$

Donde $x^{`\mu`}$ es la posición de la partícula en el sistema $S`$ en reposo instantáneo en el instante τ.

476 *Obsérvese que es la hipótesis de la cronometría lo que nos permite determinar la trayectoria de la partícula en cualquier sistema inercial como una sucesión de transformaciones propias de Lorentz. Si γ dependiese de la aceleración los resultados serían muy distintos. Veremos que esto tiene mucha importancia también el cálculo de la radiación emitida por una partícula acelerada, que se puede tratar como una sucesión de velocidades instantánea.*

El postulado de la cronometría también nos da otro importante resultado. Supongamos que con la anterior partícula hay un vector fijo asociado $\vec{e}`$ que se mueve con ella, y que tendrá entonces en $S`$ la representación

$$\bar{e}`=\left(e^{\alpha`}\right)\equiv(0,\vec{e}`)$$

Sus componentes en S serán $e^{\alpha}(\tau)=e^{\mu`}\mathcal{L}_{\mu`}^{\alpha}(\tau)$. Como $\mathcal{U}^{\alpha`}=\left(c,\vec{0}\right)$ será $0\equiv e^{\alpha`}\mathcal{U}_{\alpha`}=e^{\alpha}\mathcal{U}_{\alpha}$, y por tanto $\bar{e}$ y la velocidad $\bar{\mathcal{U}}$ son siempre ortogonales. Derivando la anterior ecuación respecto a τ se obtiene

$$\frac{de^{\alpha}}{d\tau}=e^{\mu`}\frac{d\mathcal{L}_{\mu`}^{\alpha}}{d\tau}=\frac{1}{c^2}e^{\mu}\frac{d\mathcal{U}_{\mu}}{d\tau}\mathcal{U}^{\alpha}$$

Esta ecuación nos dice que el vector $\bar{e}$ visto desde S tiene un movimiento que se conoce como precesión de Thomas.

Desarrollando el cálculo, se demuestra que en cada instante de tiempo el vector $\vec{e}$ realiza una precesión instantánea en S con la velocidad angular

$$\vec{\omega}(\vec{v}) = -\frac{1}{v^2}(\gamma(v) - 1)\vec{v} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad instantánea de la partícula en cada tiempo de su trayectoria.

Para bajas velocidades no relativistas

$$\vec{\omega} \approx -\frac{1}{2c^2}\vec{v} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Este fenómeno de rotación se ha observado con el espín de las partículas, dado una buena concordancia de lo predicho por la cinemática relativista.

Todo esto también se puede ver como una consecuencia de teorema matemático que nos dice que toda transformación propia de Lorentz se puede descomponer como el producto de una transformación boost pura y una rotación espacial. Sin embargo el postulado de cronometría tiene un alcance y significado más amplio y profundo, cuyo origen todavía no es bien conocido.

Dinámica relativista

Si m_0 es la masa en reposo de una partícula, se define el cuadrivector del momento por

$$\bar{\mathcal{P}} \stackrel{\text{def}}{=} m_0\bar{\mathcal{U}} = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{u}) = (mc, \vec{p})$$

y su módulo es el invariante escalar

$$\bar{\mathcal{P}}^2 = \mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}_\alpha = m^2c^2 - \vec{p}^2$$

siendo

$$m = \gamma m_0$$

En el sistema inercial $S`$ en el que se encuentra la partícula en reposo es $\bar{\mathcal{P}} = (m_0, 0)$, por lo que al ser el módulo un invariante se tendrá

$$m_0{}^2c^2 = m^2c^2 - \vec{p}^2$$

Esta ecuación es importante, ya que veremos posteriormente, relaciona la energía con el momento.

Se define el cuadrivector de fuerza sobre una partícula por

$$\bar{\mathcal{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\bar{\mathcal{P}}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(m_0\frac{d\bar{\mathcal{U}}}{d\tau}\right) = \gamma\left(\frac{d(mc)}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \gamma\bar{\mathcal{K}}$$

Donde $\gamma\bar{\mathcal{K}}$ es un cuadrivector. A $\bar{\mathcal{K}}$ se le denomina fuerza de Minkowsky, cuya componente espacial coincide con la definición de fuerza de la mecánica clásica. Sin embargo, es importante observar que $\bar{\mathcal{K}}$ no es un cuadrivector ante las transformaciones de Poincaré, pero que si lo es $\gamma\bar{\mathcal{K}}$.

Es importante observar que, en los cuadrivectores de fuerza, la parte temporal es el trabajo realizado por unidad de tiempo y la fuerza corresponde a su parte espacial

$$\bar{\mathcal{F}} \equiv \gamma\bar{\mathcal{K}} = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \gamma\left(\vec{v}\cdot\vec{F}, \vec{F}\right)$$

Si observamos los cuadrivectores de momento $\bar{\mathcal{P}} = (E/c, \vec{p})$ y de la fuerza $\bar{\mathcal{F}} = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$, vemos que hay una interrelación entre la energía y el momento, y que los cuadrivectores se trasforman, al pasar de un sistema en movimiento a otro fijo respecto a él, de igual forma que el cuadrivector $(\Delta x^0, \Delta\vec{x})$.

La aceleración $\vec{a}$ tiene una dirección distinta de la fuerza $\vec{F}$, ya que

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{F}\right)\vec{v} + m\vec{a}$$

y por tanto

$$m\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{F}\right)\vec{v}$$

Este resultado que difiere de la mecánica clásica, y es debido a el cuadrivector $\bar{\mathcal{F}} = \gamma\left(\vec{v}\cdot\vec{F}, \vec{F}\right)$ se transforma relativisticamente existiendo una interrelación entre el trabajo realizado por las fuerzas y las componentes de la fuerza.

Si $\vec{F}_0$ es la fuerza newtoniana en un sistema S_0 en el que un sistema se encuentra en reposo, entonces en otro sistema inercial S respecto al cual se mueve con velocidad $\vec{v}$ observará una fuerza $\vec{F}$ que viene dada de acuerdo con las transformaciones de Lorentz por

$$\vec{F} = \frac{1}{\gamma}\vec{F}_0 + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{v^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{F}_0\right)\vec{v}$$

O lo que lo mismo, las proyecciones de la fuerza respecto a la dirección de movimiento $\vec{v}$ verifican

$$\vec{F}_{\parallel} = \vec{F}_{0_{\parallel}}$$
$$\vec{F}_{\perp} = \frac{1}{\gamma}\vec{F}_{0_{\perp}}$$

Las anteriores relaciones de transformación son importantes para que las condiciones de equilibrio se mantengan al pasar de un sistema inercial a otro.

Otro hecho relevante es que la parte espacial del cuadrivector fuerza ya no es paralela a la aceleración clásica $\vec{a}$*, lo que dio lugar a polémicas sobre si existía una masa inercial longitudinal y otra transversal diferentes.*

El que en relatividad la aceleración no sea colineal con la fuerza newtoniana, llevó en un principio a interpretar inadecuadamente que había dos tipos de masas distintas, una longitudinal $m = \gamma m_0$ *y otra transversal* $m = \gamma^3 m_0$ *según las proyecciones de la fuerza y la aceleración. Incluso muchas veces se define la masa relativista como* $m = \gamma m_0$*, lo que es inapropiado, ya que la magnitud física relevante para la definición de la fuerza solo es la variación del momento con respecto al tiempo.*

Extrapolar definiciones de la mecánica clásica a la relatividad, ha llevado muchas veces a interpretaciones erróneas y controversias innecesarias. Veremos que incluso la masa total en reposo m_0 *de un sistema es una constante en relatividad, solo si el sistema energéticamente aislado y cerrado, ya que la masa está ligada a la energía, y en relatividad no es una magnitud independiente.*

Las ecuaciones físicas relativista en el límite de velocidades pequeñas respecto a la luz concuerda con la mecánica clásica, pero el querer interpretar con conceptos clásicos las ecuaciones de la relatividad lleva a veces a este tipo de paradojas o de discusiones muchas veces sin sentido.

Origen relativista de la fuerza de Lorentz

Ya vimos que, para una partícula en un campo electromagnético, la componente espacial de la fuerza de Minkowsky es la fuerza de Lorentz, por lo que será

$$\vec{K} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = m_0(\gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma \vec{a})$$

Si no hay campo eléctrico $\vec{E} = 0$ y como $\vec{v} \wedge \vec{B}$ es perpendicular a $\vec{v}$ deberá ser

$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ y $q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}.$

lo que nos indica que existe una aceleración centrípeta que hace que la partícula se mueva helicoidalmente. Sin embargo m depende de v, por lo que difiere este resultado del de la mecánica clásica.

La fuerza de Lorentz también se puede deducir de forma simple mediante las transformaciones de Lorentz.

Si en el sistema S_0 en el que la partícula se encuentra en reposo solo existe un campo eléctrico $\vec{E}_0$, entonces la fuerza que actúa será $\vec{F}_0 = q\vec{E}_0$. Si se aplican las transformaciones de Lorentz, se obtiene que $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, por lo que la fuerza de Lorentz es una consecuencia del principio de la relatividad.

De igual forma $\rho_0 \vec{E}_0$ es la densidad de fuerza en S_0, y aplicando los mismos criterios que antes vemos $\vec{f} = \gamma\rho_0(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ es la densidad de fuerza que actúa en S.

Equivalencia entre energía y momento

Se define el trabajo por unidad de tiempo, como el producto de los cuadrivectores de la fuerza y la velocidad, por lo que será un invariante relativista

$$\bar{\mathcal{F}} \cdot \bar{\mathcal{U}} = \frac{d\bar{\mathcal{P}}}{d\tau} \cdot \bar{\mathcal{U}} = \gamma^2 \frac{d(mc^2)}{dt} - \gamma^2 \vec{u} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{\mathcal{U}}^2}{d\tau} \equiv 0$$

y por tanto se verifica

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \vec{u} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{F}$$

Esta ecuación nos dice que en un sistema cerrado, el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula, que se invierte en aumentar la energía de la partícula, que es igual a su masa relativista por el cuadrado de la velocidad de la luz

$$E = mc^2$$

que es la conocida ecuación de Einstein de equivalencia entre masa y energía.

En el límite no relativista en que $v/c \ll 1$, tenemos desarrollando por Taylor en serie de potencias de v/c

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2$$

que nos dice que existe una energía en reposo igual a $m_0 c^2$.

La energía cinética, vendrá entonces dada por

$$T = E - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

Esta equivalencia entre masa y energía, se ha comprobado en la transformación de masa atómica en energía de ligadura de los nucleones en el núcleo, y es el principio de los reactores nucleares en que, por cada de fisión de núcleo, se liberan 200 Mev.

Como el módulo de $\bar{\mathcal{P}}$ es un invariante relativista, será $|\bar{\mathcal{P}}|^2 = |\bar{\mathcal{P}}_0|^2$, donde $\bar{\mathcal{P}}_0$ se refiere al sistema de la partícula en reposo, con lo que se obtiene la ecuación invariante de energía momento

$$\mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}_\alpha = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2$$

que nos relaciona la energía con el momento, y que en relatividad ya no son dos magnitudes independientes.

Esta relación es una constricción que hay que tener en cuanta en la formulación hamiltoniana.

El cuadrivector de momento también lo podemos escribir de la forma

$$\bar{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}^\alpha) = (\gamma m_0 c^2, \gamma m_0 \vec{v}) = (mc^2, m\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

por lo que en relatividad el momento y la energía no son ya independientes.

Esta ecuación, nos permite también definir la masa m_0, como el valor más bajo que puede tomar la energía en un sistema inercial. Esta matización es importante, pues en para una partícula compleja en un sistema en que se encuentra en reposo, en m_0 se incluyen también las energías internas de constitución.

Veremos más adelante, que la masa solo es constante en sistema cerrado donde no existan fuentes de energía de origen no mecánico. Sin embargo, la masa y la energía no son en relatividad tampoco dos entes independientes, y toda energía es está dotada de una masa inercial, y a la viceversa, la masa es una forma de energía.

Ya vimos en anteriores capítulos que el campo electromagnético se comportaba como si hubiera una relación entre la energía y el momento. Esta equivalencia, vemos ahora que es un principio más general y yace en el corazón de la teoría de la relatividad. Hay también un intercambio entre energía y momento al pasar de un sistema a otro inercial a otro, pero la anterior ecuación de energía momento siempre se conserva invariante.

En la teoría de la relatividad la energía siempre es positiva y $E \geq c|\vec{p}|$. Para una partícula con velocidad $\vec{v}$ se verifica que

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p} = \left|\frac{\partial E}{\partial \vec{p}}\right|$$

Para una partícula sin masa

$$E = c|\vec{p}| \quad \text{y} \quad \bar{\mathcal{P}} = \frac{E}{c}(1, \vec{p})$$

Por lo que en relatividad el momento y la energía no son ya independientes.

Estas relaciones veremos que son también validas para un sistema de partículas.

La ecuación de energía momento nos permite también definir la masa m_0, como el valor más bajo que puede tomar la energía en un sistema inercial. Esta matización es importante, pues en para una partícula compleja en un sistema en que se encuentra en reposo, en m_0 se incluyen también las energías internas de constitución.

Veremos más adelante, que la masa solo es constante en sistema cerrado donde no existan fuentes de energía de origen no mecánico. Sin embargo, la masa y la energía no son en relatividad tampoco dos entes independientes, y toda energía es está dotada de una masa inercial, y a la viceversa, la masa es una forma de energía.

Postulado universal de la energía

Todo lo anterior se aplica también a un sistema de partículas. Si $\vec{P}_t$ es el momento total de un sistema de partículas, y E_t su energía total, entonces $\bar{\mathcal{P}}_t = \left(E_t/c\,,\vec{P}_t\right)$ será un cuadrivector. Como el momento es un cuadrivector temporal que verifica $|\bar{\mathcal{P}}_t|^2 > 0$, existirá siempre un sistema inercial S_0 en que el momento total sea nulo $\vec{P}_{0t} \equiv 0$. En cualquier otro sistema inercial S que se desplace a velocidad $-\vec{v}$ respecto a S_0 se verificará por las transformaciones de Lorentz

$$\bar{\mathcal{P}}_t = \gamma \frac{E_{0t}}{c^2}\vec{v} \qquad E_t = \gamma E_{0t} = \gamma M_{0t}c^2 = M_t c^2 \;\; y \quad \vec{v} = \frac{c^2}{E_t}\vec{P}_t$$

siendo M_{0t} la masa total en el sistema S_0 , que se puede descomponer en una parte procedente de la suma de las masas inerciales en reposo y otra parte procedente de la energía cinética en S_0

$$M_{0t} = \frac{E_{0t}}{c^2} = \Sigma m_0 + \frac{T_{0t}}{c^2}$$

Vemos que la energía cinética interna T_{0t} es equivalente a una masa inercial.

Esto se puede extender a cualquier tipo de energía interna, y el principio de equivalencia de la energía establece que cualquier variación de la energía total de un sistema se traduce en una variación su masa inercial dada por

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

Es importante observar que la conservación de la energía implica que el cuadrivector $\bar{\mathcal{P}} = \left(E/c\,,\vec{P}\right)$ sea temporal, por lo que como ya hemos visto es posible encontrar un *sistema inercial en que el momento lineal total se anule; sin embargo, debido a ello no existe un sistema inercial en que la energía se anule o sea negativa, por lo que la mecánica clásica relativista no admite energías negativas.*

Así mismo, si un cuerpo absorbe calor, su energía también contribuye a su masa inercial

El proceso inverso también es factible, y la masa inercial puede transformarse en otros tipos de energía, como en los procesos de aniquilación entre partículas, o en los enlaces nucleares de los núcleos estables, en que el defecto de mas se traduce en la energía de ligadura.

El postulado universal de la energía, establece que cualquier estado de un sistema físico con energía total E, *tiene una masa inercial asociada* E/c^2, *y que cualquier masa inercial* M *tiene una energía asociada igual a* Mc^2. *De lo expuesto anteriormente, hay que tener en cuenta que* M *no tiene porqué ser la suma de las masas inerciales en reposo, y que pude contener otros tipos de energías que contribuyen a la mas inercial. Aunque* $M = E/c^2$ *y* $E = Mc^2$ *pueden parecer que son la misma ecuación, sin embargo, como hemos visto, son relaciones que tienen implicaciones e interpretaciones físicas muy distintas de las que Einstein sutilmente se percató.*

Si el sistema no es termodinámicamente cerrado, el principio de la conservación de la energía establece que por unidad de tiempo, la variación de la energía, debe ser igual al trabajo realizado sobre el sistema por una fuente de energía de origen no mecánico, como puede ser el calor producido por efecto Joule

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} + Q$$

Esto implica que la ecuación para el cuadrivector de fuerza deben ser modificadas de la forma

$$\bar{\mathcal{F}} \equiv \gamma \bar{K} = \gamma \left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} + Q, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma \left(\vec{v} \cdot \vec{F} + Q, \vec{F} \right)$$

Por tanto, ahora será

$$\bar{\mathcal{F}} \cdot \bar{\mathcal{U}} = -\gamma^2 Q = -Q_0$$

donde Q_0 es la fuente de energía no mecánica en el sistema S_0 en el sistema en reposo $\vec{v} = 0$.

El que el invariante relativista $\bar{\mathcal{F}} \cdot \bar{\mathcal{U}}$ no sea nulo, es una indicación de que el sistema no es termodinámicamente cerrado.

Además como se verifica que

$$\bar{\mathcal{F}} \cdot \bar{\mathcal{U}} \equiv \bar{\mathcal{U}} \cdot \frac{d(m_0\bar{\mathcal{U}})}{d\tau} = -c^2\frac{dm_0}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm_0}{d\tau} = \frac{Q_0}{c^2}$$

Es decir, la energía no mecánica se invierte en masa inercial, lo que era de esperar por el postulado universal de la energía.

Si $\Delta\tau$ es una medida del tiempo propio en sistema inercial en reposo S_o, entonces respecto a cualquier otro sistema inercial se verificará

$$Q\Delta t \equiv \frac{1}{\gamma}Q_0\Delta\tau$$

y por tanto, será un invariante relativista la relación

$$\gamma\Delta Q = \Delta Q_0$$

que nos define la relación de transformación de la energía no mecánica entre sistemas inerciales.

En el caso de varias partículas que interactúan, sus cuadrivectores no se pueden sumar como los vectores en mecánica clásica, ya que cada uno de ellos se refiere a sucesos distintos y, como hemos visto, el concepto de simultaneidad absoluta no existe en la teoría de la relatividad, pues nos llevaría a contradecir el principio de causalidad.

Tampoco en relatividad existe el concepto de potencial de interacción de un sistema de partículas, ya que el concepto de energía potencial está relacionado con la acción a distancia y vuelven a plantearse los problemas de simultaneidad de sucesos respecto a diferentes sistemas inerciales.

En relatividad no es posible escribir una ecuación general para la energía o el momento de un sistema de partículas con interacción entre ellas. Sólo es posible en el caso de que las partículas no interactúen o interactúen electromagnéticamente de forma débil, o cuando la interacción sea por contacto, como en los choques.

En los choques entre partículas, los sucesos ocurren simultáneamente y las líneas del mundo de la partícula se cruzan en un punto, por lo que es posible sumar los cuadrivectores de antes y después de la colisión. Si el sistema está aislado, dicha suma se conservará, lo que nos da las ecuaciones de conservación de la energía procedente de la parte temporal de los cuadrivectores y de conservación del momento lineal procedente de la parte espacial.

Como también se debe conservar el módulo del cuadrivector antes y después de la colisión, tenemos una ecuación más que considerar, y ello es debido a la relación entre la energía y el momento en relatividad.

Por todo lo anterior, el concepto de campo es fundamental en relatividad para las interacciones, ya que en el electromagnetismo las partículas interaccionan con el campo a través de la fuerza de Lorentz, o más precisamente como ya hemos visto, a través del tensor de energía impulso del campo electromagnético.

Equivalencia entre momento angular y conservación del centro de energía

Para un sistema aislado de r partículas sin interacción el momento total es la suma de los momentos de todas las partículas individuales

$$\mathcal{P}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma\mathcal{P}_r^{\alpha}$$

Se define el tensor conservativo antisimétrico covariante de momento angular para un sistema de partículas como

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma\left(x_r^{\alpha}\mathcal{P}_r^{\beta} - x_r^{\beta}\mathcal{P}^{\alpha}\right)$$

El vector centro de energía verifica la ecuación

$$J^{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}^{kl} = \Sigma(x^k p^l - x^l p^k)$$

$$ck^i \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma\mathcal{J}_r^{0i} = x_c^0\mathcal{P}_r^i - x_c^i\mathcal{P}_r^0 = ctp^i - x_c^i\frac{E}{c}$$

habiéndose definido el centro de energía como

$$x_c^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma\mathcal{P}_r^0 x_r^i}{\Sigma\mathcal{P}_r^0} = \frac{\Sigma E_r x_r^i}{\Sigma E_r} = \frac{\Sigma E_r x_r^i}{E}$$

J^{kl} es equivalente a al momento angular clásico, y k^i al centro de conservación de la energía equivalente el centro de masas de la mecánica clásica, y son magnitudes conservativas que no varían con el tiempo para un sistema cerrado.

Respecto a este sistema se verifica

$$\vec{P} = \frac{E}{c^2 t}\vec{x}_c = \frac{E}{c^2}\frac{d\vec{x}_c}{dt} = M\frac{d\vec{x}_c}{dt}$$

por lo que el momento total es la energía por la velocidad del centro de energía.

Puesto que $(\mathcal{P}^\alpha) = \left(\mathcal{P}^0, \vec{P}\right)$ es un cuadrivector temporal existirá un sistema inercial respecto al cual el momento total lineal $\vec{P}$ se anula, y este coincidirá con el entro de energía.

El momento angular respecto a un suceso (x_0^α) se define como el tensor covariante

$$J^{\alpha\beta} = \Sigma\left((x^\alpha - x_0^\alpha)\mathcal{P}^\beta - \left(x^\beta - x_0^\beta\right)\mathcal{P}^\alpha\right)$$

El momento angular total $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$ de un sistema sin interacciones alrededor de un centro de sucesos x_0^α, se puede descomponer en el momento angular $l^{\alpha\beta}$ del del centro de masas respecto el centro de sucesos y el momento angular orbital del sistema $s^{\alpha\beta}$ respecto del centro de gravedad x_c^α

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta}$$
$$l^{\alpha\beta} = (x^\alpha - x_0^\alpha)\mathcal{P}^\beta - \left(x^\beta - x_0^\alpha\right)\mathcal{P}^\alpha$$
$$s^{\alpha\beta} = (x^\alpha - x_c^\alpha)\mathcal{P}^\beta - \left(x^\beta - x_c^\alpha\right)\mathcal{P}^\alpha$$

Evidentemente $s^{\alpha\beta}$ verifica la relación invariante de ortogonalidad

$$s^{\alpha\beta}\mathcal{P}_\beta \equiv 0$$

Además de $\bar{\mathcal{P}}^2$, existe otro invariante de Poincaré, representado por el cuadrivector de Pauli y Lubanski definido por

$$\mathcal{W}^\alpha \stackrel{\text{def}}{\equiv} -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\sigma\upsilon}\mathcal{J}_{\mu\sigma}\mathcal{P}_\upsilon$$
$$\mathcal{W}^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \varepsilon^{\alpha\mu\sigma\upsilon}\mathcal{W}_\sigma\mathcal{P}_\upsilon$$

Puesto que $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico y $l^{\alpha\beta}$ es antisimétrico en $(x^\alpha - x_0^\alpha)$ y $\mathcal{P}^\beta$, entonces $\mathcal{W}^\alpha$ depende solo de $s^{\alpha\beta}$

$$\mathcal{W}^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\sigma\upsilon}s_{\mu\sigma}\mathcal{P}_\upsilon$$

Se comprueba que

$$\mathcal{W}^\alpha\mathcal{P}_\alpha \equiv 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{W}^{\alpha\beta}\mathcal{W}_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha$$

Puesto que en un sistema cerrado, $s_{\mu\sigma}$ y $\mathcal{P}_\upsilon$ se conservan, también será una magnitud conservativa $\mathcal{W}^\alpha$, y además como $s_{\mu\sigma}$ es un tensor y $\mathcal{P}_\upsilon$ un cuadrivector, $\mathcal{W}^\alpha$ será también un cuadrivector y su norma es un invariante relativista, que se puede evaluar respecto al sistema del centro de energía respecto al cual el momento total lineal se anula y $(\mathcal{P}_\upsilon) = (m_0 c, 0)$

$$\mathcal{W}^{\alpha}\mathcal{W}_{\alpha}=\mathcal{W}_{c}^{\alpha}\mathcal{W}_{c\alpha}=-\frac{1}{4}\varepsilon^{kij0}\varepsilon_{kln0}s_{ij}s^{ln}(\mathcal{P}_{c}^{0})^{2}=-(m_0c)^2\vec{s}^{2}$$

siendo $\vec{s}$ la componente del espín tridimensional

$$\vec{s}=(s^k)=\frac{1}{2}\varepsilon^{kln}s_{ln}$$

Por la antisimetría de $\varepsilon^{\alpha\beta\mu}$, será ortogonales $\mathcal{W}^{\alpha}$ y $\mathcal{P}_{\mu}$, y por tanto $\mathcal{W}^{\alpha}$ es un cuadrivector de tipo espacial

$$\mathcal{W}^{\alpha}\mathcal{P}_{\alpha}\equiv 0$$

Para una partícula con masa en reposo m_0, se define el espín $\vec{\mathcal{S}}=(\mathcal{S}^{\alpha})$ como

$$\mathcal{S}^{\alpha}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{m_0c}\mathcal{W}^{\alpha}$$

$$\mathcal{S}^{\alpha\beta}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{(m_0c)^2}\mathcal{W}^{\alpha\beta}$$

Se demuestra que $P^{\alpha}P_{\alpha}$ y $\mathcal{W}^{\alpha}\mathcal{W}_{\alpha}$ son los únicos operadores de Casimir que son invariantes bajo cualquier transformación del grupo de Poincaré que conmutan con todos los elementos del grupo, y que además, tienen como autovalores el espectro continuo m^2c^2.

En el caso una partícula sin masa $\mathcal{W}^{\alpha}\mathcal{W}_{\alpha}=\mathcal{P}^{\alpha}\mathcal{P}_{\alpha}=\mathcal{W}^{\alpha}\mathcal{P}_{\alpha}=0$ y entonces $\mathcal{P}^{\alpha}$ y $\mathcal{W}^{\alpha}$ serán proporcionales, por lo que serán paralelos o antiparalelos según sea $\mathcal{W}^{0}\mathcal{P}_{0}>0$ o $\mathcal{W}^{0}\mathcal{P}_{0}<0$ conservándose en el tiempo este producto. Por ello se define como helicidad la magnitud conservativa para partículas sin masa

$$\hbar=\frac{\mathcal{W}^{0}}{\mathcal{P}^{0}}=-\frac{1}{2\mathcal{P}^{0}}\varepsilon^{0kln}\mathcal{J}_{kl}\mathcal{P}_{n}=\frac{1}{\mathcal{P}^{0}}\vec{J}\cdot\vec{P}=\vec{J}\cdot\vec{n}_{\vec{P}}$$

donde $\vec{n}_{\vec{P}}$ es un vector unitario en la dirección de propagación.

Para partículas sin masa como los fotones la helicidad es una constante invariante que puede tomar dos valores con signo opuesto, que están relacionados con las dos posibles polarizaciones circulares de la luz, como ya hemos visto en el capítulo de teorías de los invariantes.

En mecánica cuántica se define la helicidad como $\vec{J}\cdot\vec{p}/\hbar$, y para una partícula con masa en número de valores que puede tomar depende del grado de multiplicidad del momento angular orbital.

Ondas y energía

Otro caso de interés es el caso de una onda que se propaga por el espacio $exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)\right]$ con un vector de ondas $\vec{k}$ y una frecuencia angular ω.

Por el segundo postulado de la relatividad todos los observadores inerciales deberán ver la físicamente misma fase, lo que da origen al efecto Doppler

$$\theta = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t = -\bar{k}\cdot\bar{x} = invariante$$

Se define el cuadrivector de ondas

$$\bar{k} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

Como $(ct, \vec{x})$ es un cuadrivector y su producto vectorial con $\bar{k}$ es un variante, se sigue que $\bar{k}$ será también un cuadrivector, por lo que se verificará

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \vec{k}^2 = invariante$$

La constante será cero en el vacío para una onda electromagnética.

$\bar{k}$ se transforma como las componente del cuadrivector $(c\Delta t, \Delta\vec{x})$, lo que nos da la composición del movimiento de propagación y el efecto Doppler relativista para la frecuencia.

Cuando hacemos la transformación para pasar de un sistema móvil $S`$ a uno fijo S respecto al que se mueve con velocidad $\vec{v}$

$$\frac{\omega}{c} = \gamma\left(\frac{\omega`}{c} + \frac{v}{c}k`_{\parallel}\right)$$
$$k_{\parallel} = \gamma\left(k`_{\parallel} + \frac{v}{c}\frac{\omega`}{c}\right)$$
$$k`_{\perp} = k`_{\perp}$$

Si definimos la velocidad de fase como

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v_f}\vec{k}_u \quad \text{y}$$

$$\vec{k}` = \frac{\omega`}{v`_f}\vec{k}`_u$$

donde $\vec{k}_u = \vec{k}/\left|\vec{k}\right|$ es un vector unitario en la dirección de propagación, entonces es fácil comprobar a partir de las ecuaciones anteriores que

$$\left(\frac{c}{v_f}\right)^2 = \frac{\left(\frac{c}{v`_f}\right)^2\left(1+\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)+\left(\frac{v}{c}\right)^2+2\,\frac{v}{v`_f}\,k`_{u\parallel}+\left(\frac{v}{v`_f}\right)^2 k`^2_{\parallel}}{\left(1+\frac{v}{v`_f}\,k`_{\parallel}\right)^2}$$

siendo $k`_{\parallel} = \vec{v}\cdot\vec{k}_u$.

Por tanto, la velocidad u de una partícula que se propaga en la dirección $\vec{n}$ se transforma de la misma forma que la de una onda con velocidad de fase en la misma dirección

$$v_f = \frac{c^2}{u}$$

En el caso de un rayo de luz es $u = c$, y por tanto $v_f = c$.

La diferencia de las proyecciones angulares de las componentes $k_{\parallel}$ y $k`_{\parallel}$, da lugar al fenómeno de aberración de la posición aparente de las estrellas, que observado primeramente por Bradley.

Esto dio la idea a de Broglie de asociar a una partícula con velocidad $u\vec{n}$ una onda plana con velocidad de fase $\vec{v}_f = c^2/u\vec{n}$ de una forma relativisticamente covariante.

En el caso de una onda electromagnética que se propaga en medio dieléctrico sin fuentes ni corrientes de índice de refracción $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, ya hemos visto en el capítulo de teorías escalares, que $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$ son ortogonales entre si

$$\vec{k}\cdot\vec{D} = \vec{k}\cdot\vec{H} = 0$$

y además se verifica

$$-\vec{k}\wedge\vec{H} = \omega\vec{D} \quad \text{y}$$

$$-\vec{k}\wedge\vec{E} = \omega\vec{E}$$

por, lo que el campo electromagnético se puede representar por la expresión general de una onda

$$\vec{D} = f_1\left(\frac{\omega\vec{x}\cdot\vec{k}_u}{v_f} - \omega t\right)\vec{e}_1 + f_2\left(\frac{\omega\vec{x}\cdot\vec{k}_u}{v_f} - \omega t\right)\vec{e}_2$$

$$c\varepsilon\vec{B} = -f_2\left(t - \frac{\vec{x}\cdot\vec{k}_u}{v_f}\right)\vec{e}_1 + f_1\left(t - \frac{\vec{x}\cdot\vec{k}_u}{v_f}\right)\vec{e}_2$$

siendo

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} \qquad v_f = \frac{c}{n} \quad y \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{n}$$

El flujo de energía y la densidad de energía serán entonces

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{1}{n^2}(f_1^2 + f_2^2)\vec{k}_u \quad y \quad w = \frac{1}{2}\left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}\right) = \frac{1}{n^2}(f_1^2 + f_2^2)$$

Se define el vector de de velocidad de energía como

$$\vec{v}_w \stackrel{\text{def}}{\equiv} \frac{\vec{S}}{w}$$

Esta definición es general, y se puede aplicar a las componentes de todo tensor general de energía impulso. En caso de la onda electromagnética toma el valor

$$\vec{v}_w \equiv \frac{\vec{S}}{w} = \frac{c}{n}\vec{k}_u = \vec{v}_f$$

que coincide con la velocidad de grupo.

Por tanto, para una onda electromagnética que se propaga en un medio homogéneo, la velocidad de la energía es igual a la velocidad de fase.

Sin embargo, en un medio dispersivo hay que hay que distinguir entre ambas velocidades, cuando la velocidad de grupo es diferente de la velocidad de fase.

Se puede definir de forma general un cuadrivector de velocidad de energía

$$\bar{U}_w \stackrel{\text{def}}{\equiv} \gamma(v_w)(c, \vec{v}_w) = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v_w^2/c^2}}, \frac{\vec{v}_w}{\sqrt{1 - v_w^2/c^2}}\right)$$

En el sistema S_0 en que el medio dieléctrico se encuentra en reposo será

$$\bar{U}_{0w} = \left(\frac{cn_0}{\sqrt{n_0^2 - 1}}, \frac{c\vec{k}_u}{\sqrt{n_0^2 - 1}}\right)$$

donde por $n_0 = n(\omega')$ ya que v_{0w} está referido al sistema inercial S_0 en el que se encuentra en reposo el medio dieléctrico.

Al ser $\bar{k} \cdot \bar{U}_w = \bar{k}_0 \cdot \bar{U}_{0w} \equiv 0$ un invariante relativista, deberá verificarse para una onda de luz

$$v_f = \vec{v}_w \cdot \vec{k}_u$$

es decir, la velocidad de fase de la onda de luz en S es igual a la proyección desu velocidad de energía o de grupo en la dirección de propagación del rayo, o de la normal a las ondas.

Aplicando las relaciones de transformación de Lorentz para un sistema inercial S cualquiera, se obtiene entonces para bajas velocidades

$$\vec{v}_w = \frac{c}{n_0}\vec{k}_u + \vec{v} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}_u}{n_0^2}\vec{k}_u \quad \Longrightarrow \quad v_w = |\vec{v}_w| \cong \frac{c}{n_0} + \left(1 - \frac{1}{n_0^2}\right)\vec{v}\cdot\vec{k}_u$$

Esta expresión se podría haber obtenido también desarrollando en serie en términos de v/c la expresión anteriormente obtenida para v_f. Como

$$\omega` \cong \omega - \omega\frac{n}{c}\vec{v}\cdot\vec{k}_u \quad \Longrightarrow \quad \frac{c}{n_0(\omega`)} \cong \frac{c}{n(\omega)} + \frac{c}{n^2(\omega)}\frac{dn}{d\omega}\frac{\omega n(\omega)}{c}\vec{v}\cdot\vec{k}_u$$

se obtiene finalmente la fórmula del efecto óptico de Fizeau y Fresnel ya estudiada en el capítulo de sistema móviles

$$v_f = \frac{c}{n(\omega)} + \left(1 - \frac{1}{n^2(\omega)} + \frac{\omega}{n(\omega)}\frac{dn}{d\omega}\right)$$

Vemos que el efecto Fizeau es fundamentalmente un efecto cinemático relativista de la composición de velocidades.

La densidad de momento asociada vendrá dada entonces por

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{\omega}{c^2}\vec{v}_f$$

Para una onda polarizada $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ y $\left|\vec{E}\right| = c\left|\vec{B}\right|$, por lo que será

$$v_w = v_f = c$$

Para una onda de radiación en el vacío será $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ y con $\alpha = E/cB \geq 1$

$$v_w = v_f = \frac{2c\alpha}{1+\alpha^2} < c$$

Hemos visto que el momento relativista se puede expresar como

$$\bar{\mathcal{P}} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

verificándose

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = invariante$$

Einstein para la luz y De Broglie para las partículas, postularon que entre $\bar{k}$ y $\bar{\mathcal{P}}$ siempre existe una relación proporcional, de forma que

$$\frac{E}{c} = \hbar\frac{\omega}{c}$$
$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

siendo $\hbar = h/2\pi$ donde h es la constante de Planck, que se puede determinar experimentalmente mediante el efecto fotoeléctrico.

De las anteriores relaciones, volvemos obtener que la velocidad de una partícula viene dada por

$$|\vec{u}| = \frac{c^2}{E}|\vec{p}| = \left|\frac{\partial E}{\partial \vec{p}}\right| = \frac{c^2}{v_w}$$

La hipótesis de Einstein le llevó a demostrar que el efecto fotoeléctrico y el espectro de radiación de los cuerpos calientes (cuerpo negro) se debían a que la luz está formada por cuantos discretos de fotones de energía indivisible igual a $\hbar\omega$ *, y con un momento* $\hbar\vec{k}$*, lo que le valió el Premio Nobel.*

Invirtiendo el razonamiento De Broglie postuló que una partícula con momento $\vec{p}$ *tiene siempre asociada una onda con un vector de onda igual a* $\hbar\vec{k} = \vec{p}$*. Esta hipótesis fue el paso previo a la mecánica cuántica, y le valió a su vez el Premio Nobel. Este efecto se demuestra haciendo interferir los dos haces de electrones que resultan de incidir un haz sobre una lámina con dos rendijas, obteniéndose figuras de difracción similares a las de la ondas de luz, o por difracción de electrones en la superficie de sólido cristalino.*

Como veremos más adelante, para poder determinar el espectro de radiación del cuerpo negro, Planck tuvo que hacer la hipótesis que la radiación se absorbía y emitía por la materia en cuantos de energía discretos proporcionales a la constante de Planck. Sin embargo, no dio el paso definitivo de Einstein de que ello no era sólo un modelo, si no que correspondía a la naturaleza real de la luz.

Puesto que $\bar{k}$ y $\bar{\mathcal{P}}$ se transforman de la misma manera como un cuadrivector, también será un invariante relativista el factor $\hbar$ en la relación

$$\hbar\bar{k} = \bar{\mathcal{P}}$$

La velocidad de fase de la onda asociada vendrá dada por

$$\frac{1}{v_f} = \frac{|\vec{k}|}{c k^0} \equiv \frac{|\vec{p}|}{c\mathcal{P}^0} = \frac{p}{E} = \frac{u}{c^2}$$

y por tanto, *existe una analogía formal entre la velocidad u de la partícula (asociada a la propagación de la energía) y una onda con velocidad de fase de la $v_f = c^2/u$. El pasó de la analogía a establecer una relación universal fue el paso dado por Einstein y de Broglie que inició el desarrollo de la mecánica cuántica.*

Consideremos ahora, un rayo de luz que se propaga en un medio dieléctrico con índice de refracción n que está estacionario en un sistema S_0, que se mueve con velocidad $\vec{v}$ respecto a otro sistema inercial S. Será entonces

$$\bar{k} = \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{v_f}\vec{k}_u\right) \qquad \text{y} \qquad \bar{k}_0 = \left(\frac{\omega_0}{c}, \frac{n\omega_0}{c}\vec{k}_{0u}\right)$$

donde $\vec{k}_u$ y $\vec{k}_{0u}$ son vectores unitarios en la dirección de propagación en los sistemas S y S_0.

La velocidad de grupo $\vec{v}_g$ de un frente de ondas de luz, que es la que transporta le energía, se transforma al cambiar de sistema inercial, de igual forma que una partícula en la dirección del rayo de luz.

Como la velocidad de grupo es la de la energía será

$$\vec{v}_g = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta\vec{k}}$$

Puesto que $(\Delta\omega/c\,, \Delta\vec{k})$ se transforma relativísticamente como un cuadrivector de forma similar a $(c\Delta t, \Delta\vec{x})$; vemos entonces, que la velocidad de grupo $\vec{v}_g$ se transforma de forma similar al vector velocidad de una partícula.

Covarianza del campo electromagnético

Se resumen a continuación las fórmulas covariantes del electromagnetismo, que no se volverán a deducir, ya que fue hecho en otros capítulos, y las cuales son invariantes ante una trasformación de Lorentz entre sistema inerciales.

En el capítulo de teorías variacionales, partimos de la siguiente densidad de lagrangiana del campo electromagnético

$$\mathcal{L}(\vec{x},\tau) = \underset{particula\ libre}{-\rho_{0m}c\sqrt{(\mathcal{U}^\alpha\mathcal{U}_\alpha)}} \qquad \underset{interacción\ e.m.}{-\frac{1}{c}\mathcal{J}^\alpha A_\alpha} \qquad \underset{campo\ e.m.\ libre}{-\frac{\varepsilon_0}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}}$$

La lagrangiana así escrita, hace que la acción sea un invariante relativista:

$$S = \int \mathcal{L}d^3x d\tau = -\int \left(\rho_{0m}c\sqrt{(\mathcal{U}^\alpha\mathcal{U}_\alpha)} + \frac{\mathcal{J}^\alpha A_\alpha}{c} + \frac{\varepsilon_0}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)d^3x\, d\tau$$

y además representa una formulación covariante para todo sistema inercial

Por esta razón, todas las formulas para el campo electromagnético obtenidas en el capítulo de teorías variacionales son covariantes e invariantes ante una trasformación de Lorentz entre sistema inerciales. Las resumimos a continuación.

A partir de los principios variacionales, vimos que las ecuaciones de Maxwell venían cinemáticas dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0 \qquad \text{o} \qquad \partial_\beta \mathcal{F}^{\star\alpha\beta} = 0$$

siendo el tensor dual

$$\mathcal{F}^{\star\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\sigma}\mathcal{F}_{\mu\sigma}$$

La ecuaciones dinámicas de campo de Maxwell vienen dadas por

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{J}^{\beta}}{c\varepsilon_0}$$

siendo

$$\mathcal{J}^{\alpha} = \rho_0 \mathcal{U}^{\alpha} = \rho_0\gamma(c,\vec{u}) = (c\rho, \rho\vec{u})$$

donde ρ_0 es la densidad de carga en el sistema $S`$ en reposo, en el que $\mathcal{J}`^{\alpha} = \left(\rho_0 c, \vec{0}\right)$

Un hecho relevante, es que la corriente de desplazamiento es necesaria para la covarianza de las ecuaciones dinámicas.

La anterior ecuación contiene implícitamente la conservación de la carga, que se puede considerar como una constricción, ya que

$$0 \equiv \partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{c\varepsilon_0}\partial_\beta \mathcal{J}^{\beta}$$

Lo que implica que

$$\mathcal{Q} = \int_{V_\infty} \mathcal{J}^0\, d^3x = C^{te} \qquad \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = 0$$

Además la carga es un invariante relativista

$$\int_{V`} \rho_0\, d^3x` = \int_V \gamma\rho_0\, d^3x = \int_V \rho\, d^3x = invariante$$

donde en un sistema inercial arbitrario S la densidad de carga observada viene dada por $\rho = \gamma\rho_0$. O en forma diferencial

$$\rho\Delta V = \rho_0 \Delta V_0 \quad y \quad \Delta V = \gamma \Delta V_0$$

De las ecuaciones de campo, se deduce que el tensor electromagnético $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ verifica la ecuación

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{c\varepsilon_0}\left(\partial_\alpha \mathcal{J}_\beta - \partial_\beta \mathcal{J}_\alpha\right)$$

siendo

$$\partial^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\mu}\partial_\mu = g^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

por lo que se verificará

$$-\partial^\mu \partial_\mu \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

En función de los potenciales, la anterior ecuación dalambertiana adopta la expresión

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\beta + \partial^\beta \partial_\mu \mathcal{A}^\mu = \frac{\mathcal{J}^\beta}{c\varepsilon_0}$$

La solución de la anterior ecuación con las condiciones de contorno adecuadas, nos determina completamente el campo electromagnético.

Acoplamiento mínimo

La ecuación dinámica de movimiento para una carga puntual viene dada por

$$\frac{d\mathcal{P}^\alpha}{d\tau} \equiv \frac{d(m_0 \mathcal{U}^\alpha)}{d\tau} = \frac{q}{c}\mathcal{U}^\beta F^\alpha_{\ \beta}$$

La carga no solo actúa como un factor escalar de acoplamiento lineal en la interacción electromagnética, sino que también es la fuente del campo electromagnético, ya que como hemos visto en las teorías de causalidad, el campo eléctrico y magnético se debe solo a las cargas y corrientes y a su variación con el tiempo.

El tensor electromagnéticos en función de los potenciales $(A^\alpha) = \left(\emptyset, c\vec{A}\right)$ viene dado por

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ -E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ -E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix}$$

Puesto $F^{\alpha\beta}$ es un tensor, al pasar de un sistema inercial S a otro $S`$ con velocidad relativa $\vec{\beta} = \vec{v}/c$, se obtienen mediante las transformaciones de Lorentz

$$\vec{E}` = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{(\gamma - 1)}{\vec{v}^2}(\vec{v} \cdot \vec{E})\vec{v}$$

$$\vec{B}` = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}\right) - \frac{(\gamma - 1)}{\vec{v}^2}(\vec{v} \cdot \vec{B})\vec{v}$$

Los potenciales verifican las ecuaciones de fuentes

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\beta = \frac{\mathcal{J}^\beta}{c\varepsilon_0}$$

con el gauge de Lorentz

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0$$

Para una carga puntual que se mueve en una trayectoria $\vec{x}_p(t)$ será

$$\rho(\vec{x}, t) = q\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \quad \text{y}$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = q\frac{d\vec{x}_p}{dt}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

La delta de Dirac $\delta^3(\vec{x})$ no es un invariante de Lorentz, sin embargo si lo es

$$\delta^4(\bar{x}) = \delta(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3) = \frac{1}{c}\delta^3(\vec{x})\delta^3(t) = \frac{1}{\gamma c}\delta^3(\vec{x})\delta^3(\tau)$$

ya que

$$\int \delta^4(\bar{x})dx^0\, dx^1 dx^2 dx^3 = \int \delta^3(\vec{x})\delta(t)dt\, d^3x = \int \delta^3(\vec{x})\delta(\tau)d\tau\, d^3x = 1$$

La densidad de carga se puede rescribir como

$$\rho(\bar{x}) = qc \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(\bar{x} - \bar{x}_r(t))dt = q \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(\bar{x} - \bar{x}_r(x`^0))dx`^0$$

$$= q\delta^3\big(\vec{x} - \vec{x}_r(t)\big) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\big(x^0 - x_r^0(x`^0)\big)dx`^0 = q\delta^3\big(\vec{x} - \vec{x}_r(t)\big)$$

habiéndose hecho uso de la propiedad de la delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(t) - C)f(t)dt = \sum_i \left| \frac{f(t)}{\frac{dg}{dt}} \right|_{g(t_i)=C}$$

donde t_i son la soluciones de la ecuación $g(t_i) = C$.

El cuadrivector de corriente se puede expresar de igual forma como

$$\bar{\mathcal{J}}(\bar{x}) = qc \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^4\big(\bar{x} - \bar{x}_r(t)\big)\frac{d\bar{x}_r}{dt}dt = qc \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^4\big(\bar{x} - \bar{x}_r(\tau)\big)\bar{U}d\tau$$

Vemos que la ecuación de continuidad se verifica de forma inmediata, ya que

$$\partial_\beta \mathcal{J}^\beta(\bar{x}) = -qc \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{x}_p}{dt}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_r}\delta^4\big(\bar{x} - \bar{x}_r(t)\big)dt = -qc \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\delta^4\big(\bar{x} - \bar{x}_r(t)\big)dt$$

$$= -qc\delta^4\big(\bar{x} - \bar{x}_r(t)\big)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \equiv 0$$

De las ecuaciones dinámicas de Maxwell se obtiene

$$\partial^\alpha\partial_\alpha A^\beta - \partial^\beta\partial_\alpha A^\alpha = \frac{q}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^4\big(\bar{x} - \bar{x}_r(t)\big)\frac{dx_r^\beta}{dt}dt$$

La carga q, que es una constante invariante relativista, acopla también de forma lineal el campo electromagnético con las ecuaciones dinámicas de la partícula, razón por la cual es aplicable el principio de superposición en la electrodinámica clásica.

También se dice que la carga q es un parámetro de acoplamiento mínimo, ya que el acoplamiento se produce de forma proporcional. El valor del acoplamiento es débil ya que α_e es pequeño respecto a la unidad

$$\alpha_e = \frac{e^2}{\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

Covarianza del tensor de energía momento

Ya hemos visto en los anteriores capítulos, que el tensor de energía-momento del campo electromagnético en el vacío una vez simetrizado, viene dado por la expresión covariante

$$T^{\alpha}{}_{\beta} = \varepsilon_0 \left(F^{\alpha\sigma} F_{\sigma\beta} - \frac{\delta^{\alpha}_{\beta}}{4} F^{\tau\sigma} F_{\tau\sigma} \right)$$

Es importante observar, que el tensor electromagnético y las ecuaciones de Maxwell se escriben de forma covariante en función solo de $F_{\alpha\beta}, \partial_\alpha$ y $g_{\alpha\beta}$.

El tensor electromagnético que en función de las componentes de los vectores del campo electromagnético toma la expresión gauge invariante

$$T^{00} = w = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2\right) \qquad \text{Densidad de energía}$$

$$\left(T^{0i}\right) = \vec{S}/c = c\epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} \qquad \text{Flujo de energía}$$

$$\left(T^{i0}\right) = c\vec{g}_i = \frac{1}{c}\vec{S} \qquad \text{Densidad de momento}$$

$$-\left(T^{ij}\right) = \overline{\overline{T}}_M = \epsilon_0 \left(E^i E^j + c^2 B^i B^j - \frac{\delta_{ij}}{2}\left(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2\right) \right) \qquad \text{Tensor de Maxwell}$$

Además se verifica la ecuación para la densidad de fuerza sobre la materia

$$-\frac{\partial\ T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \left(k^{\alpha}\right) = \left(\rho\vec{u} \cdot \vec{E}, \vec{E} + \rho\vec{u} \wedge \vec{B}\right)$$

cuya parte espacial y temporal, como ya hemos visto, corresponde a las ecuaciones

$$\frac{\partial T_M^{ij}}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \vec{k} = \rho\left(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}\ \right) \qquad \text{Densidad de fuerza de Lorentz}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div\ \vec{S}\ = -\rho\vec{u} \cdot \vec{E} \qquad \text{Conservación de la energía}$$

Evidentemente se verifica la condición de ortogonalidad para un sistema aislado y cerrado

$$k_\alpha \mathcal{U}^\alpha = F_{\alpha\beta} \mathcal{U}^\alpha \mathcal{U}^\beta \equiv 0$$

Como ya hemos comentado, estas ecuaciones son válidas solo si no existen fuentes de energía no mecánicas y no hay variación de masa propia. En caso contrario, habría que sumar a la componente temporal de la fuerza de Minkowski la fuente de energía no mecánica.

El concepto de de distribución de carga estacionaria sin corrientes solo tiene lugar en sistema de referencia inercial particular S_0, Lo mismo sucede con los conceptos de *campo eléctrico puro y magnético puro. Al igual que la densidad de masa, en general, son magnitudes ligadas al tensor de energía momento.*

La existencia -para todo sistema- de un tensor de energía momento, es un principio general de la relatividad y, además, la divergencia de su parte espacial determina la densidad fuerza que actúa sobre el sistema. Sus componentes temporales definen la densidad de energía, la densidad de momento y el flujo de energía, existiendo entre ellos una relación de proporcionalidad a través de la constante de la velocidad de la luz.

Un hecho importante es que, en un sistema mecánico, la densidad de masa, a diferencia de la carga, no es un escalar invariante, sino que se transforma en un cuadrivector energía momento y forma parte de la componente $\bar{\bar{T}}^{00}$ *del tensor de energía-momento.*

Por otra parte, nada garantiza que tenga que existir una masa en reposo para las partículas. Cada partícula tiene una masa en reposo que la caracteriza y que puede ser incluso cero, cuyo origen todavía se desconoce.

La ecuación que liga la energía con el momento para una partícula con masa cero será $\bar{p} = E/c$ *, y la partícula se moverá a la velocidad de la luz.*

En el vacío en ausencia de cargas y corrientes sin interacciones, el tensor energía impulso electromagnético verifica la condición para todo sistema aislado de que su divergencia se anule

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

lo que da lugar a que sea independiente del tiempo el cuadrivector de energía-momento

$$\int_V T^{0\alpha} dV = \left(\int_V w\, dV, \int_V c\vec{g}\, dV\right)$$

por lo que la energía del campo electromagnético contenida en un volumen tiene las mismas propiedades de transformación que las de una masa puntual en un sistema mecánico.

Esta equivalencia general fue la base para las hipótesis de Einstein y de De Broglie.

Como $\int_V T^{0\alpha} dV$ es un cuadrivector, su módulo será un invariante, por lo que se verificará

$$\int_V T^{0\alpha} T^{0}{}_{\alpha} dV = \left(\int_V w\, dV\right)^2 - \left(\int_V c\vec{G}\, dV\right)^2 = invariante = 0$$

En el caso de un campo electromagnético el invariante anterior es cero.

Para una onda electromagnética, si se compara la anterior ecuación con la ecuación de la frecuencia angular, se ve que para un campo electromagnético en el vacío

$$\frac{\int_{V_\infty} w\, d^3x}{\omega} = invariante \quad y \quad \frac{\left|\int_{V_\infty} c\vec{g}\, d^3x\right|}{|\vec{k}|} = invariante$$

Evidentemente el invariante es la constante de Planck.

Estos resultados se pueden generalizar para cualquier tensor de energía momento, que se puede construir a partir de un sistema definido por una densidad lagrangiana.

Hemos visto también, que para la materia, todas las magnitudes conservativas pueden expresarse como una integración de las componentes de un tensor de energía impulso.

Se define t_m^{ij} como el flujo (densidad de momento*velocidad) i a través de la unidad de superficie en la dirección j.

Para un sistema de partículas sin interacción entre ellas $\Sigma p_r^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$ es la densidad de momento, y $\Sigma m_r \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$ la densidad de masa de una partícula que

se desplaza en una trayectoria $\vec{x}_p(t)$.

De acuerdo con esto será

$$t_m^{ij}(\vec{x}, t) = \Sigma p_r^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) x_{r,t}^j = \Sigma m_r \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \frac{dx_r^i}{dt} \frac{dx_r^i}{dt}$$

El tensor simétrico t_m^{ij} se denomina tensor de tensiones de la materia incoherente, debido la propiedad de que su divergencia está relacionada con la fuerza a la que está sometida la materia

$$\begin{aligned}
\int_V \partial_k t_m^{ik} d^3x &= \int_S t_m^{ik} n_k dS = \int_V \Sigma m_r \partial_k \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \frac{dx_r^k}{dt} \frac{dx_r^i}{dt} d^3x \\
&= -\int_V \Sigma m_r \frac{\partial}{\partial x_r^k} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \frac{dx_r^k}{dt} \frac{dx_r^i}{dt} d^3x = \\
&= -\int_V \Sigma m_r \frac{dx_r^i}{dt} \frac{d}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t))\, d^3x = \int_V \Sigma m_r \frac{d^2 x_r^i}{dt^2} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) d^3x \\
&= \int_V f^i d^3x
\end{aligned}$$

Donde $\vec{f} = (f^i)$ es la densidad de fuerza que actúa sobre la materia.

Esto nos dice que la fuerza total que actúa sobre un volumen viene representada por una integral sobre la superficie del tensor de tensiones

$$\int_V \partial_k t_m^{ik} d^3x = \int_V f^i d^3x$$

o también en forma diferencial local

$$\partial_k t_m^{ik} = f^i$$

Sin embargo, el tensor de tensiones t_m^{ik} no es covariante.

En la formulación covariante se define el tensor de energía momento como

$$T_m^{\alpha\beta}(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \Sigma \mathcal{P}_r^\alpha(t) \frac{dx_r^\beta}{dt} \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_r(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma m_{0r} c \delta^4\left(\bar{x} - \bar{x}_r(\tau)\right) \frac{dx_r^\alpha}{d\tau} \frac{dx_r^\beta}{d\tau} d\tau$$

Es fácil comprobar que $T_m^{\alpha\beta}$ por su construcción es un tensor ante las transformaciones de Poincaré.

El significado de las componentes del tensor es el siguiente

$T_m^{00} = w_m$	Densidad de energía
$T_m^{k0} = c g_m^k$	Densidad de momento $k * c$
$T_m^{0k} = S_m^k / c$	Flujo de energía en la dirección k/c
$T_m^{ij} = t_m^{ij}$	Tensor de tensiones

En caso presente de un sistema de partículas sin interacciones, debido a que todas magnitudes que definen el tensor son intensivas, ha sido suficiente bastaría sumarlas. Debido a este carácter aditivo del tensor energía impulso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $T_m^{\alpha\beta}$ es el tensor de toda la materia presente. Sin embargo si hay interacciones o como en el caso de un fluido existe una presión, el anterior tensor hay que modificarlo par incluir los efectos de la densidad de energía de la presión.

Es fácil comprobar que la divergencia del tensor de energía impulso de la materia es cero en el caso de un sistema cerrado

$$\partial_\beta T_m^{\alpha\beta} \equiv 0$$

Al estar la materia confinada en volumen finito

$$\partial_\beta T_m^{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma m_{0r} c \delta^4\left(\bar{x} - \bar{x}_r(\tau)\right) \frac{dx_r^\alpha}{d\tau} \frac{dx_r^\beta}{d\tau} d\tau =$$

$$\partial_\beta T_m^{\alpha\beta} == -\int_{-\infty}^{\infty} \Sigma m_{0r} c\delta^4 \frac{d}{d\tau}\delta^4\left(\bar{x}-\bar{x}_r(\tau)\right)\frac{dx_r^\alpha}{d\tau}d\tau = -\Sigma m_{0r} c\delta^4\delta^4\left(\bar{x}-\bar{x}_r(\tau)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \equiv 0$$

De la anterior ecuación de continuidad se concluye que momento total integrado es una constante en el tiempo (que nos relaciona el momento total lineal y la energía)

$$\mathcal{P}^\alpha = \frac{1}{c}\int_{V_\infty} T_m^{\alpha 0} d^3x \qquad y \qquad \frac{d\mathcal{P}^\alpha}{dt} \equiv 0$$

Si se define el tensor $\mathcal{J}^{\alpha\beta\mu}$ en torno a un suceso $\bar{x}_0$ como

$$c\mathcal{J}_m^{\alpha\beta\mu} \stackrel{\text{def}}{=} (x^\alpha - x_0^\alpha)T_m^{\beta\mu} - \left(x^\beta - x_0^\beta\right)T_m^{\alpha\mu}$$

se comprueba que

$$\partial_\mu \mathcal{J}_m^{\alpha\beta\mu} \equiv 0$$

por lo que el tensor total $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$ (que determina el momento angular y centro de energía) integrado a todo el espacio es constante en el tiempo

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta} = \int_{V_\infty} \mathcal{J}_m^{\alpha\beta 0} d^3x \qquad y \qquad \frac{d\mathcal{J}^{\alpha\beta}}{dt} \equiv 0$$

Por tanto las 10 magnitudes conservativas de la isometría de Poincaré son solo una consecuencia de las propiedades de simetría de tensor de energía impulso y de su divergencia se nula para un sistema cerrado.

El concepto de tensor energía momento es un concepto que implica la idea de que mecánicamente la energía está localizada y puede fluir de un lugar a otro conservándose. Sin embargo, el concepto de conservación general de la energía local, de forma que la energía se puede transformar de una forma a otra es un postulado mucho más sutil.

Aunque el tensor de energía momento puede derivarse a partir de una lagrangiana, sin embargo este es una identidad más fundamental. El que adopte una forma tensorial de 4x4 es debido a las condiciones de invarianza ante las transformaciones de Poincaré, y a diferencia de la mecánica newtoniana, la energía y el momento no son entidades independientes.

El que todo sistema físico cerrado esté representado por un tensor de energía impulso simétrico cuya divergencia es cero se acepta como un postulado universal.

En el caso de que el sistema no sea cerrado y que se pueda descomponer en dos sistema físicos $T_1^{\alpha\beta}$ y $T_2^{\alpha\beta}$ que interaccionan

$$T^{\alpha\beta}=T_1^{\alpha\beta}+T_2^{\alpha\beta}$$

Al ser $\partial_\beta T^{\alpha\beta}\equiv 0$ se debe cumplir

$$\partial_\beta T_1^{\alpha\beta}=-\partial_\beta T_2^{\alpha\beta}=\mathcal{F}^\alpha$$

Donde $\mathcal{F}^\alpha$ desempeña el concepto de una densidad fuerza covariante, cuya componente temporal es el trabajo realizado por el sistema *2* sobre el sistema *1*, y la componente espacial está relacionada con la fuerza clásica

$$\bar{\mathcal{F}}=(\mathcal{F}^\alpha)=\left(\frac{\gamma}{c}\vec{f}\cdot\vec{v},\gamma\vec{f}\right)$$

Sin embargo, la descomposición no es única, ya que a $T_1^{\alpha\beta}$ y $T_2^{\alpha\beta}$ siempre se les puede sumar un tensor cuya divergencia sea nula, por lo que un tensor de energía momento no simétrico también es una indicación de que hay una interacción y el sistema no es no es cerrado. Sin embargo $\vec{\mathcal{F}}$ debe tener una representación única ya que debe ser un observable medible.

Las propiedades geométricas de homogeneidad e isotropía del espacio y del tiempo, junto con el principio de causalidad constituyen el núcleo de la dinámica clásica. La definición de fuerzas dada, es sin embargo, una convención geométrica. Para comprender su significado real, es necesario principios adicionales como los principios gauge, de equivalencia, o el principio cuántico, que profundicen sobre el origen de las interacciones, aunque siempre hay un condicionante es la geometría del espacio tiempo. Sobre todos esto temas se tratará en el siguiente capítulo de teorías métricas, tomando como ejemplo el campo electromagnético y su interacción con la materia.

Covarianza en medios materiales

Puesto que $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\vec{E},\vec{B})$ es un tensor covariante, cuyas componentes son las del campo eléctrico y magnético, al pasar de un sistema móvil $S`$ a otro fijo S respecto a él, podemos obtener las relaciones de transformación de los campos mediante la transformación de Lorentz

$$\mathcal{F}^{\alpha`\beta`}=\mathcal{L}^{\alpha`}{}_{\alpha}\mathcal{L}^{\beta`}{}_{\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta}$$

que nos da las resultados ya obtenidos en el capítulo de teorías de sistemas móviles.

Para medios materiales, por un procedimiento similar al seguido en el capítulo de teorías de sistemas móviles, si en el tensor $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\vec{E},\vec{B})$, remplazamos $\vec{E}$ por $\vec{D}$ y $\vec{B}$ por

$\vec{H}/c$ se forma el tensor $\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\vec{D},\vec{H})$, que verificará las ecuaciones de Maxwell en medios materiales

$$\partial_\alpha \mathcal{G}^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\mathcal{J}^\beta$$

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\star\alpha\beta} = 0$$

siendo $\mathcal{F}^{\star\alpha\beta}$ el tensor dual de $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ y $\bar{\mathcal{J}}$ el cuadrivector de corrientes.

De igual forma se puede crear un tensor de materia $\mathcal{M}_{\alpha\beta}(\vec{P},\vec{M})$ con las polarizaciones $c\vec{P}$ y las magnetizaciones $\vec{M}$.

A través de la relaciones de constitución tenemos una relación entre los tres tensores, que nos lleva a las mismas ecuaciones obtenidas en el capítulo de transformaciones de teorías de sistemas móviles y a un tensor de energía-momento no simétrico.

Puesto que los campos $\vec{E},\vec{B}$ así como $\vec{P},\vec{M}$ son magnitudes promediadas macroscópicamente, procedentes de los campos microscópicos, las conclusiones establecidas en dicho capítulo para sistemas móviles serán válidas en cuanto lo son las relaciones de transformación de los propios campos microscópicos.

A partir de los tensores electromagnéticos, se pueden formar los siguientes cuadrivectores

$$\bar{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}^\alpha) \equiv \frac{1}{c} F^\alpha{}_\beta \mathcal{U}^\beta = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{E}_a \cdot \vec{v}, \gamma \vec{E}_a\right)$$

$$\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}^\alpha) \equiv \frac{1}{c} \mathcal{G}^\alpha{}_\beta \mathcal{U}^\beta = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{D}_a \cdot \vec{v}, \gamma \vec{D}_a\right)$$

que representan las fuerzas sobre una carga de prueba en reposo en una cavidad longitudinal y transversal respectivamente, siendo los campos aparentes efectivos

$$\vec{E}_a = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{D}_a = \vec{D} + \frac{1}{c^2}\vec{v} \wedge \vec{H}$$

De igual forma con los tensores duales se pueden formar los cuadrivectores

$$\bar{\mathcal{F}}^\star = \frac{1}{c}\left((F^\alpha) \equiv \mathcal{F}^\alpha{}_\beta \mathcal{U}^{\beta\star\alpha}\right) \equiv \frac{1}{c}\mathcal{F}^{\star\alpha}{}_\beta \mathcal{U}^\beta = \left(\gamma \vec{B}_a \cdot \vec{v}, \gamma c \vec{B}_a\right)$$

$$\bar{\mathcal{G}}^\star = (\mathcal{G}^{\star\alpha}) \equiv \frac{1}{c}\mathcal{G}^{\star\alpha}{}_\beta \mathcal{U}^\beta = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{H}_a \cdot \vec{v}, \gamma \vec{H}_a\right)$$

que representan las fuerzas sobre un polo magnético en reposo en una cavidad transversal y longitudinal respectivamente, siendo los campos efectivos

$$\vec{B}_a = \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{H}_a = \vec{H} - \vec{v} \wedge \vec{D}$$

Como ya vimos en el capítulo de teorías de sistemas móviles, las ecuaciones en un sistema inercial S vienen dadas por

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_a = -\frac{D\vec{B}}{Dt} \qquad \frac{D\vec{D}}{Dt} = -\vec{J} + \rho\vec{v} + \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_a$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

siendo la derivada convectiva

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

Como las ecuaciones son lineales, los campos son aditivos y es aplicable el principio de superposición. Las anteriores ecuaciones son también válidas para sistemas no inerciales si las aceleraciones son pequeñas.

Covarianza de las interacciones en sistemas disipativos abiertos

Como ya hemos visto, el cuadrivector de corriente se puede descomponer en dos componentes correspondientes a una parte convectiva y otra conductiva

$$\bar{\mathcal{J}} = \rho_0\bar{\mathcal{U}} + \bar{\mathcal{J}}_c$$

siendo $\bar{\mathcal{U}}$ el cuadrivector de velocidad $\bar{\mathcal{U}} = (\gamma c, \gamma\vec{v})$

En el sistema S_0 de las cargas en reposo, serán

$$\bar{\mathcal{U}}_0 = (c, \vec{0})$$

$$\bar{\mathcal{J}}_0 = (c, \vec{J}_0)$$

$$\bar{\mathcal{J}}_{0c} = (0, \vec{J}_0)$$

Es fácil comprobar que se verifican las siguientes relaciones de ortogonalidad invariantes

$$\bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathcal{J}}_0 . \bar{\mathcal{U}}_0 = \rho_0 c^2 \quad \text{y}$$

$$\bar{\mathcal{J}}_c \cdot \bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathcal{J}}_{0c} \cdot \bar{\mathcal{U}}_0 \equiv 0$$

Por tanto, se verifica por el principio de la extensión covariante que

$$\bar{\mathcal{J}}_c = \bar{\mathcal{J}} - \frac{1}{c^2}(\bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{U}})\bar{\mathcal{U}}$$

$\bar{\mathcal{J}}_c$ es la representación del cuadrivector de la corriente de conducción, mientras que $\rho_0\bar{\mathcal{U}}$ representa la corriente de convección.

La densidad de fuerza $\bar{k} = (k^0, \vec{k})$ dinámica para una distribución de cargas y corrientes, ya vimos que viene dada por

$$\vec{k} \equiv \vec{f}_L = \rho\vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + \vec{J}_c \wedge \vec{B}$$
$$ck^0 = \vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{E} \cdot (\rho\vec{v} + \vec{J}_c) = \vec{k} \cdot \vec{v} + \vec{E}_a \cdot \vec{J}_c$$

Por tanto, $\vec{k} \cdot \vec{v}$ es el trabajo hecho sobre la materia, y $\vec{E}_a \cdot \vec{J}_c$ es una fuente de energía que se asocia a la energía disipada por efecto Joule, por lo que la ley de Ohm adopta también la forma cuadrimensional

$$\bar{\mathcal{J}}_c = \bar{\mathcal{J}} - \frac{\bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{U}}}{c^2}\bar{\mathcal{U}} = \sigma\bar{E}_a$$
$$Q_J = \vec{E}_a \cdot \vec{J}_c = \sigma\vec{E}_a^2$$

Por tanto

$$ck^0 = \vec{k} \cdot \vec{v} + Q_J$$

Esto origina que los cuadrivectores de fuerza y velocidad ya no sean ortogonales

$$\bar{k} \cdot \bar{\mathcal{U}} = k_\alpha \mathcal{U}^\alpha = -\mathcal{U}^\alpha F_{\alpha\beta} \mathcal{U}^\beta = -\mathcal{U}^{0\alpha} F_{0\alpha\beta} \mathcal{U}^{0\beta} = -Q_{0J}$$

donde Q_{0J} es el calor disipado en el sistema en reposo S_0.

Como ya hemos comentado, al ser $k_\alpha \mathcal{U}^\alpha \neq 0$, la energía no mecánica se invierte en la variación de masa propia, ya que

$$\bar{\mathcal{U}} \cdot \bar{k} \equiv \bar{\mathcal{U}} \cdot \frac{d(m_0\bar{\mathcal{U}})}{d\tau} = -c^2\frac{dm_0}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm_0}{d\tau} = \frac{Q_{0J}}{c^2}$$

Es decir, la energía no mecánica se invierte en masa inercial, lo que era de esperar por el postulado universal de la energía.

Si $\Delta\tau$ es una medida del tiempo propio en sistema inercial en reposo S_o, entonces respecto a cualquier otro sistema inercial se verificará

$$Q_J \Delta t \equiv \frac{1}{\gamma} Q_{J0} \Delta\tau$$

y por tanto, será un invariante relativista la relación

$$\gamma \Delta Q_J = \Delta Q_{J0}$$

que nos define la relación de transformación de la energía no mecánica entre sistemas inerciales.

El campo electromagnético al no ser un sistema cerrado cuando hay presencia de materia debido a la interacción y disipación de energía, es origen según Möller de que el tensor de energía momento del campo electromagnético macroscópico no sea simétrico.

$$\bar{\bar{T}}_c = \begin{pmatrix} w & \frac{1}{c}\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}\vec{S} \\ \frac{1}{c}\vec{S} & -\bar{\bar{T}}_M \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2}\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}\vec{S} = \vec{D} \wedge \vec{B}$$

Si $\bar{\bar{t}}$ es el tensor electromagnético microscópico y $\langle\bar{\bar{t}}\rangle$ su promedio microscópico, la condición que se debe cumplir es que ambos generen las mismas fuerzas observables sobre un elemento de materia

$$\vec{k} = -\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{\partial \langle t\rangle^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}$$

Sin embargo $T^{\alpha\beta}$ no tiene porque ser simplemente el promedio macroscópico $\langle\bar{\bar{t}}\rangle^{\alpha\beta}$, ya que este puede diferir en un tensor $t`^{\alpha\beta}$ cuya divergencia se anula

$$T^{\alpha\beta} = \langle t\rangle^{\alpha\beta} + t`^{\alpha\beta}$$

$$\partial_\beta\, t`^{\alpha\beta} \equiv 0$$

El que $T^{\alpha\beta}$ no sea simétrico es una indicación de que hay una interacción con la materia y el sistema no del campo electromagnético por sí solo no es cerrado.

Por tanto, si $T_t^{\alpha\beta}$ es el tensor total del sistema cerrado, debe ser la suma de tensor del campo electromagnético $T^{\alpha\beta}$ más el tensor procedente de la materia $T_m^{\alpha\beta}$

$$T_t^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + T_m^{\alpha\beta}$$

debiendo también verificarse

$$\partial_\beta T_t^{\alpha\beta} \equiv 0$$

$$T_t^{\alpha\beta} \equiv T_t^{\beta\alpha}$$

Covarianza en las interacciones de sistemas cerrados

Cualquier sistema cerrado y aislado viene representado por un tensor $T_t^{\alpha\beta}$ simétrico cuya divergencia es cero, donde es

$$T_t^{00} = h_{\ t} \qquad \text{densidad de enegía}$$
$$\left(T_t^{i0}\right) = \vec{S}_t/c \qquad \text{flujo de energía}$$
$$\left(T_t^{i0}\right) = c\vec{g}_t = \vec{S}_t/c^2 \qquad \text{densidad de momento}$$

Es de observar que $(h/c\,,\vec{g}_t)$ no es un cuadrivector.

Que se anule la divergencia del tensor, si garantiza que su integración a todo el espacio sea $\left(H_{\ t}/c\,,\vec{G}_t\right)$ un cuadrivector independiente del tiempo

$$H_{\ t} = \int\limits_{V_\infty} h_{\ t} d^3x$$

$$\vec{G}_t = \int\limits_{V_\infty} \vec{g}_t d^3x$$

que representa la energía y densidad de momento total del sistema.

Además la simetría del tensor de energía impulso garantiza la conservación del momento angular total y del centro de energía

$$\mathcal{J}_t^{\alpha\beta} = \int\limits_{V_\infty} \left(x^\alpha g^\beta - x^\beta g^\alpha\right) d^3x$$

Si el sistema se descompone en dos partes, una representada por $\bar{\bar{T}}_m^{\alpha\beta}$ correspondiente el tensor correspondiente a la materia, y la otra por el tensor del campo $T_c^{\alpha\beta}$ con el que interacciona, será entonces

$$T_t^{\alpha\beta} = T_m^{\alpha\beta} + T_c^{\alpha\beta}$$

con

$$\frac{\partial T_t^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \equiv 0 \quad y \quad T_t^{\alpha\beta} = T_t^{\beta\alpha}$$

La densidad de fuerza $(-f^\alpha)$ producida por el campo sobre la materia, viene dada

$$f^\alpha = \frac{\partial T_m^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -\frac{\partial T_c^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}$$

y según la ley de acción y reacción (f^{α}) será la fuerza producida por la materia sobre el campo, donde $T_c^{\alpha\beta}$ es el tensor del campo electromagnético con las definiciones de signos establecidas.

En general, $T_m^{\alpha\beta}$ y $T_c^{\alpha\beta}$ pueden ser no simétricos, lo que indica que existe un interacción y son sistemas cerrados individualmente. Sin embargo, se debe cumplir que el tensor total sea simétrico, y por tanto se debe verificar

$$\bar{\bar{T}}_m^{\alpha\beta} - \bar{\bar{T}}_m^{\beta\alpha} = -\left(\bar{\bar{T}}_c^{\alpha\beta} - \bar{\bar{T}}_c^{\beta\alpha}\right)$$

Separando la componente tempo de la espacial, las anteriores ecuaciones se pueden reescribir como

$$\vec{f} = \frac{\partial \vec{g}_m}{\partial t} + \left(\frac{\partial T_m^{kl}}{\partial x^l}\right) = -\frac{\partial \vec{g}_c}{\partial t} - \left(\frac{\partial T_c^{kl}}{\partial x^l}\right)$$

$$f^0 = \frac{\partial h_m}{c\partial t} + div\,\vec{S}_{\,m} = -\frac{\partial h_c}{c\partial t} - div\,\vec{S}_{\,c}$$

Sin embargo ahora $\left(H_m/c\,,\vec{G}_m\right)$ y $\left(H_c/c\,,\vec{G}_c\right)$ no son constantes en el tiempo, pues sus subsistemas no son cerrados por lo que sus divergencias no son nulas y dan lugar a las fuerzas de interacción.

El cuadrivector del sistema total cerrado $\left(H_t/c\,,\vec{G}_t\right)$ si es una constante en el tiempo, que procede de que su divergencia se anula. 509

Existe un teorema debido a Laue, que establece que si un sistema s cualquiera viene representado por un tensor $T_s^{\alpha\beta}$, entonces la magnitud construida $\left(H_s/c\,,\vec{G}_s\right)$ será un cuadrivector solo si

$$\int\limits_{V_\infty} T_s^{\alpha\beta}\, d^3x = H_{\,s}\delta^{\alpha 4}\delta^{\beta 4}$$

Este teorema es fácil demostrarlo aplicando las transformaciones de Lorentz.

Al integrase sobre todo el espacio, se verifica sin embargo, las ecuaciones de movimiento

$$\vec{F} = \int\limits_{V_\infty} \vec{f} d^3x = \frac{d\vec{G}_m}{dt} = -\frac{d\vec{G}_c}{dt}$$

De igual forma para la variación del momento tenemos

$$\frac{d\mathcal{J}_t^{\alpha\beta}}{dt} = \int\limits_{V_\infty} \left(x^\alpha f^\beta - x^\beta f^\alpha + T_m^{\alpha\beta} - T_c^{\alpha\beta}\right) d^3x$$

Un hecho importante a observar es que la fuerza que actúa sobre un cuerpo no aislado, aplicando el teorema de Gauss, viene en la realidad dada por una integral sobre la superficie que limita dicho cuerpo

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} d^3x = \frac{d\vec{G}_m}{dt} = \int_V \frac{\partial T_m^{kl}}{\partial x^l} d^3x = \oint_S T_m^{kl} n_l dS$$

$$\frac{dH_m}{dt} = \oint_S T_m^{4l} n_l dS$$

Cuando se opera en el sistema de centro de energía, entonces es cuando adopta una expresión simplificada similar de la fuerza como masa por aceleración

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c^2}\frac{d\vec{R}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(M\frac{d\vec{R}}{dt}\right)$$

Covarianza de las simetrías gauge de la mecánica cuántica como origen de las ecuaciones de Maxwell

La invarianza de forma ante una transformación de fase gauge de primera clase

$$\psi \to \psi` = \psi\, e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{x},t)}$$

se puede escribir como

$$e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{x},t)}\left(\partial_\alpha - i\,\frac{q}{\hbar c}A`_\alpha\right)\psi` = \left(\partial_\alpha - i\,\frac{q}{\hbar c}A_\alpha\right)\psi$$

lo que implica que los potenciales se deben transformar como un gauge de segunda clase

$$A`_\alpha = A_\alpha + c\partial_\alpha\Lambda$$

El tensor del campo electromagnético es un invariante ante las transformaciones gauge de segunda clase y por tanto un observable

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta = \partial_\beta A`_\alpha - \partial_\alpha A`_\beta = F`_{\alpha\beta}$$

Como ya hemos visto $F_{\alpha\beta}$ un tensor de dimensión 4 que depende solo de las componentes del campo eléctrico $\vec{E}$ y de inducción magnética $\vec{B}$, y al ser un tensor totalmente antisimétrico verifica la identidad

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \equiv 0$$

Para $\alpha = 0$ se obtienen las ecuaciones cinemáticas de Maxwell de de la ley de ausencia de polos magnéticos

Para α, β, γ cuando toman los valores espaciales 1,2,3 se obtienen las ecuaciones cinemática de Maxwell de la ley de Faraday.

La lagrangiana del campo electromagnético, tiene una simetría de forma invariante ante una transformación de fase local

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{cm} = -- \rho_{0m} c\sqrt{(\mathcal{U}^\alpha \mathcal{U}_\alpha)} - \frac{\varepsilon_0}{4}\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\mathcal{J}^\alpha \mathcal{A}_\alpha \, d^3x$$

Ya vimos que las ecuaciones dinámicas de Maxwell de la ley de Coulomb y de Ampére se obtienen haciendo la variación respecto de las variables de campo A_μ, dando el resultado ya conocido

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{J}^\beta}{c\varepsilon_0}$$

que para $\beta = 0$ obtiene la ley de Gauss y para $\beta = 1,2,3$ se obtiene la ley de Ampére.

Covarianza de las simetrías gauge de la mecánica clásica como origen de las ecuaciones de Maxwell

Hemos visto que la lagrangiana de una partícula de materia libre viene dada por L_m y que si se le añade una cuadrivergencia

$$\mathcal{L}_m \to \mathcal{L}`_m = \mathcal{L}_m + \partial_\alpha(\mathcal{J}^\alpha \Lambda)$$

las ecuaciones de movimiento determinadas por la variación de la acción

$$0 = \delta S`_m = \delta \int \mathcal{L}`_m d^4x = \delta \int \mathcal{L}_m d^4x + \delta(\mathcal{J}^\alpha \Lambda dS_\alpha) \equiv \delta S_p$$

son la mismas ya que $\mathcal{J}^\alpha \Lambda$ es nulo en el infinito.

Si se impone la condición adicional de que la lagrangiana sea invariante en su forma, hemos visto que se debe añadir un término de interacción

$$\mathcal{L}_{mi} = -\frac{1}{c}\mathcal{J}^\alpha A_\alpha$$

que contrarresta la cuadrivergencia para que la lagrangiana sea invariante

La lagrangiana de la partícula en el campo electromagnético será entonces

$$\mathcal{L}_{em} = \mathcal{L}_p - \frac{1}{c}\mathcal{J}^\alpha A_\alpha$$

por lo que seque se transformará de la forma

$$\mathcal{L}_{em} = \mathcal{L}_m - \mathcal{J}^\alpha A_\alpha \to \mathcal{L}`_{em} = \mathcal{L}_m - \frac{1}{c}\mathcal{J}^\alpha A_\alpha + \partial_\alpha(\mathcal{J}^\alpha \Lambda) = \mathcal{L}_m - \frac{1}{c}\mathcal{J}^\alpha A`_\alpha$$

y para que sea invariante en su forma los potenciales de deben transformarse como un gauge de segunda clase

$$A`_\alpha = A_\alpha - c\partial_\alpha \Lambda$$

Además se debe verificar que la cuadrivergencia de la corriente $\mathcal{J}^\alpha$ sea nula

$$\partial_\alpha \mathcal{J}^\alpha = 0$$

lo que expresa la condición de la conservación local de la carga, y que la carga total también debe ser constante.

Como hemos visto las ecuaciones cinemáticas de Maxwell vienen dadas por la ecuación del tensor electromagnético

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \equiv 0$$

Las ecuaciones dinámicas de Maxwell de la ley de Coulomb y de Ampére, se obtienen igual que antes, a partir de la lagrangiana clásica haciendo su variación respecto a los potenciales como variables de campo.

Covarianza del campo electromagnético generado de cargas en movimiento

Un ejemplo de aplicación del anterior criterio de extensión covariante, es el caso de una carga q puntual que se mueve en dirección del eje x en un sistema S con velocidad uniforma $\vec{u}$. En el sistema S_0 de referencia que se mueve con la carga habrá sólo un campo eléctrico dado por

$$\emptyset = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}_0|}$$

Si $\vec{x}$ y $\vec{x}`$ son dos puntos relacionados causalmente de la forma

$$(\vec{x} - \vec{x}`)^2 = c^2(t - t`)^2$$

Si se define

$$r^{\alpha} = (c(t - t`), (\vec{x} - \vec{x}`))$$

se verificará entonces la condición

$$r^{\alpha} r_{\alpha} = 0$$

que será también un invariante relativista.

Entonces por el principio de la extensión covariante podemos escribir

$$A^{\alpha} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{U}^{\alpha}}{\mathcal{U}^{\beta} r_{\beta}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c, \vec{u})}{[cr - \vec{r} \cdot \vec{u}]}$$

es un potencial covariante, que se reduce al potencial eléctrico en el sistema de referencia propio en reposo, ya que allí es $\mathcal{U}^{\alpha} = (c, \vec{0})$.

Los anteriores potenciales A^{α} son los de Liénard-Wiechert, para los campos creados por una carga en movimiento uniforme, que ya analizamos en el capítulos de teorías de la causalidad.

Si embargo, no siempre es tan fácil encontrar las expresiones covariante, y tampoco existe un procedimiento general para obtenerlos.

Funciones de Green covariantes

En el capítulo de teorías espectrales, vimos que una solución de la ecuación de ondas inhomogénea

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}`, t - t`) = \delta(\vec{x} - \vec{x}`)$$

era la función de Green retardada

$$G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}`, t - t`) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\delta(t - t` - r/c)}{|\vec{x} - \vec{x}`|} \theta(t - t`)$$

cuya transformada de Fourier en frecuencias es

$$G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}`, \omega) = -\frac{e^{+i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}`|}}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}`|}$$

verifica la ecuación inhomogénea de Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) G_{1r}(\vec{x} - \vec{x}`, \omega) = \delta(\vec{x} - \vec{x}`)$$

La función de Green retardada se puede escribir también como

$$G_{1r}(\vec{x}-\vec{x}`,t-t`)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{\theta(t-t`)}{r}\big(\delta(t-t`-r/c)+\delta(t-t`+r/c)\big)$$

donde el segundo término no contribuye debido a la presencia del factor $\theta(t-t`)$.

Si se tiene en cuenta la propiedad de la delta de Dirac

$$\delta(t^2-a^2)=\frac{1}{2a}\big(\delta(t-a)+\delta(t+a)\big)$$

entonces la función de Green retardada se puede reescribir de forma covariante como

$$G_{1r}(\bar{x}-\bar{x}`)=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\theta(t-t`)\delta(c^2(t-t`)^2-r^2)=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\theta(x^0-x`^0)\delta((\bar{x}-\bar{x}`)^2)$$

que verifica la ecuación de ondas en su forma covariante

$$\partial^\alpha\partial_\alpha G_{1r}(\bar{x}-\bar{x}`)=-\delta(\bar{x}-\bar{x}`)$$

puesto que además, $\delta(\bar{x}-\bar{x}`)$ es una representación covariante de la delta de Dirac

$$\int_{\Omega^\infty}\delta(\bar{x}-\bar{x}`)d^4x`=1$$

La función de Green retardada G_{1r}, es nula fuera de la rama del cono de luz $t-t`=r/c$, $G_{1r}(\bar{x}-\bar{x}`)\to 0$ cuando $r\to\infty$.

De igual forma vimos en el capítulo de teorías espectrales, que otra solución de la ecuación de ondas inhomogénea era la solución de de Green avanzada

$$G_{1a}(\vec{x}-\vec{x}`,t-t`)=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{\delta(t-t`+r/c)}{|\vec{x}-\vec{x}`|}\theta(t`-t)$$

cuya transformada de Fourier es

$$G_{1a}(\vec{x}-\vec{x}`,\omega)=-\frac{e^{-i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}`|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}`|}$$

De igual forma, podemos reescribir G_{1a} en la forma covariante

$$G_{1a}(\bar{x}-\bar{x}`)=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\theta(x`^0-x^0)\delta((\bar{x}-\bar{x}`)^2)$$

La función de Green avanzada G_{1a}, es nula fuera de la rama del cono de luz $t`-t=-r/c$, $G_{1r}(\bar{x}-\bar{x}`)\to 0$ cuando $r\to\infty$.

La transformada Fourier vimos que viene dada por

$$G_{1r,a}(\vec{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\vec{k}^2\right)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\left(k_0^2-\vec{k}^2\right)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\bar{k}^2}$$

Se puede definir también la función de Green

$$G_1(\bar{x}-\bar{x}`)\stackrel{\text{def}}{=}G_{1r}(\bar{x}-\bar{x}`)-G_{1a}(\bar{x}-\bar{x}`)=\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon(x^0-x`^0)\delta((\bar{x}-\bar{x}`)^2)$$

siendo

$$\varepsilon(t)=\theta(t)-\theta(-t)$$

La función G_1 de acuerdo con las relaciones obtenidas en el capítulo de teorías espectrales, también se puede escribir como

$$G_1(\bar{x}-\bar{x}`)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}}\int_{R_\infty^3}\varepsilon(x^0-x`^0)\frac{c}{|\vec{k}|}sen\left(|\vec{k}|(x^0-x`^0)\right)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}`)}d^3k$$

Puesto que

$$\frac{1}{|\vec{k}|}sen\left(|\vec{k}|(x^0-x`^0)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\varepsilon(k_0)}{k_0}\delta\left(k_0^2-\vec{k}^2\right)e^{-ik_0(x^0-x`^0)}dk_0$$

tenemos que G_1 es la transformada de Fourier de

$$G_1(\bar{x}-\bar{x}`)=\frac{i}{(2\pi)^2}\int_{R_\infty^3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varepsilon(k_0)}{k_0}\delta\left(\bar{k}^2\right)e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{x}`)}d^4k$$

Es fácil comprobar que

$$\left.\frac{\partial G_1(\bar{x}-\bar{x}`)}{\partial(x^0-x`^0)}\right|_{x^0=x`^0}=\sqrt{2\pi}\delta(\vec{x}-\vec{x}`)$$

y de una forma general covariante para una hipersuperficie de tipo espacial, se tendrá

$$\int_\Sigma f(\bar{x})\frac{\partial G_1(\bar{x}-\bar{x}`)}{\partial x^\alpha}d\Sigma_\alpha=f(\bar{x}`)$$

La ecuación de ondas inhomogénea para los potenciales con el gauge de Lorentz,

$$\partial^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\alpha=\frac{\mathcal{J}^\beta}{c\varepsilon_0}$$

tienen como soluciones con la funciones de Green

$$\mathcal{A}^{\beta}(\bar{x}) = \mathcal{A}^{\beta}_{in}(\bar{x}) + \frac{1}{c\varepsilon_0}\int G_{1r}(\bar{x}-\bar{x}`)\mathcal{J}^{\beta}(\bar{x}`)d^4x` \quad \text{o}$$

$$\mathcal{A}^{\beta}(\bar{x}) = \mathcal{A}^{\beta}_{sa}(\bar{x}) + \frac{1}{c\varepsilon_0}\int G_{1a}(\bar{x}-\bar{x}`)\mathcal{J}^{\beta}(\bar{x}`)d^4x`$$

donde $\mathcal{A}^{\beta}_{in,sal}(\bar{x})$ son soluciones de la ecuación de ondas homogénea

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\mathcal{A}^{\beta}_{in,sal} = 0$$

Puesto que $G_{1r} \to 0$ cuando $x^0 \to -\infty$ y $G_{1a} \to 0$ cuando $x^0 \to +\infty$, $\mathcal{A}^{\beta}_{in}$ representa una onda incidente, y $\mathcal{A}^{\beta}_{sal}$una onda saliente.

Todo esto se puede interpretar de otra forma. Si $\mathcal{A}^{\beta}_{in}$ es una onda incidente que se dispersa en la onda saliente $\mathcal{A}^{\beta}_{sal}$, entonces el campo de radiación será la diferencia entre la onda saliente y la incidente

$$\mathcal{A}^{\beta}_{rad}(\bar{x}) = \mathcal{A}^{\beta}_{sa}(\bar{x}) - \mathcal{A}^{\beta}_{in}(\bar{x}) = \frac{1}{c\varepsilon_0}\int G_1(\bar{x}-\bar{x}`)\mathcal{J}^{\beta}(\bar{x}`)d^4x`$$

Para una carga puntual

$$\mathcal{J}^{\beta}(\bar{x}`) = qc\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^4\big(\bar{x}` - \bar{x}_r(\tau)\big)\mathcal{U}^{\beta}(\bar{x}`)d\tau$$

El cuadrivector de de energía impulso radiado ($\mathcal{P}^{\alpha}_{rar}$) viene dado por

$$\frac{d\mathcal{P}^{\alpha}_{rar}}{d\tau} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^5}\mathcal{U}^{\alpha}\left(\frac{d\bar{\mathcal{U}}}{d\tau}\right)^2$$

Esta es la ecuación covariante de la energía radiada por una carga acelerada, que en sus componentes temporal y espacial toman la expresión

$$\frac{d\mathcal{P}^{0}_{rar}}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d\vec{P}_{rar}}{d\tau} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^4}\vec{v}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2$$

La primera ecuación corresponde a la energía total radiada por unidad de tiempo que ya obtuvimos por otros métodos.

La segunda ecuación da el momento asociado al campo de radiación, y por tanto está relacionada con la fuerza de frenado de la carga.

Entro dos puntos de una trayectoria del mundo de la partícula, la radiación total será

$$\Delta\mathcal{P}^{\alpha}_{rar} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^5}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathcal{U}^{\alpha}\left(\frac{d\bar{\mathcal{U}}}{d\tau}\right)^2 d\tau$$

Debe tenerse en cuenta que $\mathcal{U}^{\alpha}$ depende a su vez de $\mathcal{P}^{\alpha}_{rar}$ debido a la fuerza de frenado.

Masa electromagnética

Una carga en su propio campo se puede considerar como un sistema cerrado. La fuerza que actúa sobre una partícula cargada viene dada según la fuerza de Lorentz por

$$\int\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)\rho_e d^3x$$

En el sistema S_0 de la partícula en reposo, si $\vec{F}_0$ es la fuerza total que actúa sobre ella debida al campo, y $\vec{F}_i$ es la fuerza que proviene de su propio campo de radiación. Entonces para que exista equilibrio debe cumplirse que sea $\vec{F}_0 + \vec{F}_i = 0$, siendo

$$\vec{F}_0 = \int\rho_e\,\vec{E}_0 d^3x = q\vec{E}_0$$

ya que se asume que $\vec{E}_0$ es prácticamente constante sobre la partícula y $\int\rho_e\,d^3x = q$ es su carga total.

Si suponemos que la carga tiene la forma esférica de radio r_q y el campo eléctrico es radial, la energía del campo eléctrica vendrá dada por

$$\mathcal{W}_e = \int_{V_\infty - V_q}\frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 d^3x = \int_{r_q}^{\infty}\frac{q^2 dr}{8\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{r_q}$$

Vemos por tanto que la energía tiende a infinito $\mathcal{W}_e \to \infty$ cuando el radio tiende a cero $r_q \to 0$.

Si consideramos ahora que la partícula se mueve con una velocidad constante $\vec{v}$, para bajas velocidades $v \ll c$, como ya vimos, con su movimiento se creará un campo magnético $\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\wedge\vec{E}$, y el momento total del campo electromagnético vendrá dado por

$$\vec{G} = \epsilon_0\oint\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right)\cdot d\vec{S} = \frac{2}{3}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{\vec{v}}{r_q c^2} = m_e\vec{v}$$

Por tanto, el campo se comporta como si tuviese una masa inercial eléctrica

$$m_e = \frac{2}{3}\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{r_a c^2}$$

relacionada con la energía eléctrica mediante

$$\mathcal{W}_e = \frac{3}{4} m_e c^2$$

Un tratamiento basado en tensor de energía impulso nos lleva a los mismos resultados, ya que

$$\vec{F}_0 = -\int_{V_\infty} \frac{\partial T^{kl}}{\partial x^l} d^3x = \int_{V_\infty} \frac{\partial T_M^{kl}}{\partial x^l} d^3x$$

Siendo T_M^{km} el tensor de Maxwell

$$T_M^{km} = \epsilon_0 E^k E^m + \epsilon_0 c^2 B^k B^m - \frac{\epsilon_0}{2}(E^2 + c^2 B^2)\delta^{km}$$

Además

$$T^{00} = w = \frac{\epsilon_0}{2}(E^2 + c^2 B^2) \quad (T^{0i}) = \vec{S}/c \quad (T^{i0}) = c\vec{g} = \frac{1}{c}\vec{S}$$

Haciendo los cálculos de las anteriores componentes del tensor de energía impulso en el sistema S_0 de la carga en reposo, y realizando luego la transformación de Lorentz para su determinación en un sistema inercial respecto al que se mueve la partícula con velocidad v, se obtiene para el momento total y la energía

$$\vec{G} = \gamma m_e \vec{v} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}_e = \frac{3}{4} m_e c^2$$

Estos resultados están en desacuerdo con la ecuación relativista de la energía $\mathcal{W} = mc^2$.

Por tanto, el considerar el campo electromagnético como un objeto mecánico lleva a inconsistencias, lo que no sucede con el campo electromagnético como una onda.

Fue Heaviside el primero que se dio cuenta de la importancia física de este fenómeno que denominó inercia eléctrica.

El exceso de masa $\mathcal{W}_e/3c^2$ respecto al valor relativista, puede ser atribuido al trabajo realizado por las fuerzas de ligaduras no electromagnéticas que deben existir para mantener la partícula estable.

La divergencia del tensor de energía impulso de un sistema aislado debe ser nula, por ello, al tensor del sistema completo debe estar formado por el tensor electromagnético más otro tensor proveniente de las interacciones internas que contribuyan al defecto de energía, y cuya divergencia total sea nula. Se han propuesto distintas formulaciones para dicho tensor, basadas en fuerzas elásticas o de ligaduras internas.

La discrepancia entre ambas masas, fue estudiada por en detalle Poincaré. Para que una partícula cargada no se desintegre por las fuerzas eléctricas internas de repulsión, supuso que existen unas fuerzas (tensiones de Poincaré) que las contrarrestaban, cuyo trabajo se tiene que tener en cuenta en los cálculos de la energía.

En reposo, las fuerzas se equilibran, pero cuando la partícula se acelera, las fuerzas dejan de estar en equilibrio, debido a los retardos de propagación de los campos, lo que resulta en una fuerza de reacción sobre si misma que tiende a retardar su movimiento.

Si la carga es acelerada, como ya vimos, se produce una pérdida de energía por radiación

$$-\frac{dE}{dt}=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2$$

Para que la energía se conserve debe existir una fuerza de reacción $\vec{F}_r$ para la que se verifique el balance de energía

$$\vec{F}_r\cdot\vec{v}+\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2=0$$

Teniendo en cuenta que

$$\langle\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2\rangle=\frac{1}{t_2-t_2}\int_{t_2}^{t_2}\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}dt=\frac{1}{t_2-t_2}\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\bigg|_{t_2}^{t_2}-\frac{1}{t_2-t_2}\int_{t_2}^{t_2}\vec{v}\cdot\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}dt$$

si se supone que la partícula tiene un movimiento oscilatorio, como el dipolo eléctrico en una antena, el primer término de la última ecuación será nulo. Promediando la penúltima ecuación en el tiempo, se obtiene entonces

$$\vec{F}_r=\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$$

La fuerza total de reacción que debe actuar para la conservación de la energía y del momento será entonces

519

$$\vec{F}_i = \vec{F}_r - m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} - m_e \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si una partícula cargada se acelera, debido a la pérdida de energía por radiación, se produce una fuerza de reacción que debe ser compensada por las fuerzas externas. Esta fuerza de reacción es debida a la interacción del campo de radiación con la propia partícula.

Otra forma de ver esto, es considerando que para bajas velocidades, si la velocidad de la partícula cambia en $\delta\vec{v}$, entonces el potencial vector sufrirá a su vez un cambio dado por

$$\delta\vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi|\vec{x}|} \delta\vec{v}$$

Si tomamos una superficie $\vec{S}$, esto originará una variación del flujo magnético a través de ella dada por

$$\delta\emptyset = \int \delta\vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \delta\vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Por la ley de inducción de Faraday esto produce un campo eléctrico que originará una fuerza de inercia

$$\vec{F}_i` = q\vec{E} = -q \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 q^2}{4\pi r_a} \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{3}{2} m_e \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Un cálculo más riguroso de la fuerza de autointeracción $\vec{F}_i$ debida a la reacción de radiación y las fuerzas originadas por los campos retardados, se efectúa calculando como interacciona un elemento de carga dq de la partícula sobre otro elemento de carga dq`. Integrando sobre dq se obtiene la fuerza que procede del elemento dq, y volviendo a integrar sobre dq se calcula la fuerza $\vec{F}_i$, que se puede obtener en forma de una serie

$$\vec{F}_i = -m_e \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{c^3} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} - \frac{1}{9\pi\epsilon_0} \frac{r_a q^2}{c^4} \frac{d^3\vec{v}}{dt^3}$$

El primer término es proporcional a la aceleración y nos da la masa electrónica m_e.

El segundo término que no depende del radio de la partícula, es el responsable de la radiación de energía y produce la fuerza de reacción $\vec{F}_r$.

El tercer término se anula al hacer tender el radio a cero. La singularidad proviene del primer término al considerar la partícula como una carga puntual que interacciona sobre si misma cuando se hace tender su radio a cero.

Todo esto parece sugerir que hay dos tipos de masas, una de origen mecánico que en reposo llamaremos masa desnuda μ_0, que es en principio inobservable, y otra masa electromagnética m_e, que contribuyen al momento total con la masa observable en reposo m_0

$$\vec{P} = (\mu_0 + m_e)\vec{v} = m_0\vec{v}$$

La ecuación de movimiento de una carga acelerada para velocidades pequeñas comparadas con la luz, si se añade una fuerza externa $\vec{F}_{ext}$ a la propia de reacción $\vec{F}_i$, vendrá dada por

$$\frac{d}{dt}(\mu_0\vec{v}) = \vec{F}_i + \vec{F}_{ext} = -m_e\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{c^3}\frac{d^2\vec{v}}{dt^2} - \frac{1}{9\pi\epsilon_0}\frac{r_a q^2}{c^4}\frac{d^3\vec{v}}{dt^3}$$

Reagrupando términos, la anterior ecuación toma la expresión

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m_0\vec{v})}{dt} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{c^3}\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$$

en la que la singularidad de m_e y de μ_0 ha sido eliminada mediante la renormalización en la masa m_0 observable.

La anterior ecuación de movimiento tiene una expresión covariante que se conoce como la ecuación de Lorentz-Dirac

$$m_0\mathcal{U}^\alpha = \frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{c^3}\left(\frac{d^2\mathcal{U}^\alpha}{d\tau^2} + \frac{1}{c^2}\mathcal{U}^\alpha\frac{d\mathcal{U}^\mu}{d\tau}\frac{d\mathcal{U}_\mu}{d\tau}\right) + K^\alpha_{ext}$$

Algunos investigadores como J.J.Thomsom sugirieron que la inercia es un fenómeno electromagnético y que la masa inercial tiene su origen en un efecto inductivo debido a las carga en movimiento.

Trataron también de reducir las ecuaciones del electromagnetismo a las leyes de la mecánica. Abraham y Poincaré, llegaron incluso a afirmar que toda la masa del electrón es de naturaleza puramente eléctrica, por lo que la inercia tiene un origen electromagnético y a lo que llamamos masa no es sino una apariencia electromagnética.

Según la conservación del momento lineal total, mecánico y del campo electromagnético, se verificará

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = -\frac{d\vec{P}_c}{dt}$$

Para una carga en movimiento, el momento total del campo electromagnético viene dado por

$$\vec{P}_c = \frac{1}{c}\int w_c \, d^3\vec{x} = m_e\vec{v}$$

Con un cálculo similar al realizado al principio de esta sección, se obtiene que

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = -m_e\frac{d\vec{v}}{dt}$$

que nos indica que la partícula cargada está sometida a una fuerza en la dirección contraria a su movimiento igual a su aceleración por la masa electromagnética. Según estos autores, la inercia de la materia es una es un consecuencia de la energía de los campos y no tiene una esencia primaria.

Para una carga en movimiento, un cálculo más formal empleando el tensor de Maxwell nos lleva a que se deberán verificar las ecuaciones

$$\vec{P}_m = -\vec{P}_c + \int dt \oint T_M \cdot d\vec{S} \quad \text{y}$$

$$-E = \mathcal{W}_c + \int dt \oint \vec{S}_c \cdot d\vec{S}$$

522

Por tanto $(E/c, \vec{P}_m)$ *no es un cuadrivector ya que la anteriores integrales dependen de la historia de la partícula, lo que indica que la masa electromagnética no puede ser identificada totalmente con la masa mecánica inercial.*

Lorentz afirmó que siempre existe una masa material asociada al electrón que es una pequeña fracción de la masa electromagnética.

El que la velocidad la velocidad la luz y de la propagación de la interacciones sea la misma, constante e independiente del sistema de referencia, así como también la velocidad límite de la relatividad, lleva a que las fuentes se conserven durante la interacción. La fuente queda definida como la integración del cuadrivector energía-momento, y que a diferencia de la carga eléctrica no es independiente del marco de referencia de observación. Por ello el campo gravitatorio se propaga también como un campo, pero su fuente integrada no es un invariante sino un cuadrivector relativista, a diferencia de la carga que siempre es un invariante escalar para todos los marcos de referencia de observación. Una interacción producida por campo local que es a su vez su fuente, conduce a una teoría local que preserva el principio de causalidad.

Modificaciones de las ecuaciones de Maxwell

Se han propuesto muchas teorías para modificar las ecuaciones de Maxwell y así tratar de eliminar las anteriores singularidades e inconsistencias.

Algunas teorías proponen que a los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se les debe restar la contribución procedente de la autointeracción. Aunque así se eliminan las singularidades, la formulas que se obtienen para el electromagnetismo son demasiado complicadas y de difícil manejo.

Born e Infeld, propusieron también una compleja teoría no lineal de las ecuaciones de Maxwell, basándose en una lagrangiana no lineal función de $(\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2)$, que se aproxima a la lagrangiana clásica para campos pequeños y en el valor estacionario de la integral de la acción

$$L_{em} = \varepsilon_0 {E_0}^2\left(1 - \left(1 - \frac{\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2}{{E_0}^2} - \frac{c\vec{E}\cdot\vec{B}}{{E_0}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

donde E_0 es una constante que tiene el significado de un campo máximo

A partir del tensor energía impulso de su teoría no lineal, Born propuso que toda la masa era de tipo electromagnético, ya que para esta la lagrangiana se obtiene 523

$$m = \frac{1}{c^2}\int T_{00}\, d^3\vec{x} = 1{,}2361 m_e$$

Sin embargo, aunque la energía del campo es finita, y el tensor de energía-momento tiene las propiedades de transformación correctas, la teoría falla al no poder explicar el espín del electrón en su versión cuantizada.

Dirac sugirió, aunque sin una justificación formal, que la fuerza de autointeracción era debida a la mitad de la diferencia de los campos retardado y adelantado de la solución de la ecuación de ondas electromagnética. De esta forma, en la ecuación para $\vec{F}_i$ solo aparecen los términos pares, que son los que originan las fuerzas de resistencia a la radiación, y se elimina el término de la masa electromagnética que da lugar a las singularidades.

Una variante de esta última teoría, es la propuesta por Feynman y Wheeler, que suponen que la interacción entre partículas cargadas es debida, una mitad al campo retardado en un tiempo $t` = t - d/c$ que produce la partícula al acelerarse, y la otra mitad al campo adelantado $t`` = t` + d/c$ debido a la respuesta de las otras partículas al anterior campo retardado. De esta forma, solo contribuye a $\vec{F}_i$ la fuerza de reacción debida a la radiación. Además se comprueba que el campo adelantado no tiene ningún otro efecto observable.

Aunque algunas de estas teorías eliminan las anteriores singularidades para el electromagnetismo clásico, su rango de validez sin embargo está limitado. La experiencia indica que todas las partículas cumplen con los principios de la mecánica cuántica y, hasta el momento presente, todas las modificaciones de las ecuaciones Maxwell efectuadas dentro de la electrodinámica cuántica dan lugar siempre a singularidades para cargas puntuales. Según Feynman, la masa electromagnética, es la causa de que las partículas con carga tengan una masa mayor que las neutras, como se comprueba experimentalmente.

Sin embargo, todavía no se ha demostrado la hipótesis de que toda la masa del electrón sea de origen electromagnético y, cuál es el origen y la razón, por la que las partículas elementales tienen asociada una masa inercial perfectamente definida.